Математические парадоксы и интересные задачи для любителей математики

А.А. Лямин

А. А. ЛЯМИНЪ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЕ ПАРАДОКСЫ и ИНТЕРЕСНЫЯ ЗАДАЧИ

ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.

Въ объемѣ курса средне-учебныхъ заведеній.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.
1911.

Изданіе Коммерческаго училища и курсовъ
Бр. Паршиныхъ.
Москва. Маросейка, домъ Щелкуновыхъ.

Оглавленіе.

Стран.

Предисловіе 3

Краткій очеркъ изъ исторіи математики. 5

Условія задачъ.

Ариѳметика 17

Алгебра 23

Геометрія 45

Тригонометрія 61

Физика 66

Отвѣты и рѣшенія.

Ариѳметика 73

Алгебра 96

Геометрія 177

Тригонометрія 194

Физика. 204

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемый сборникъ является, кажется, первой попыткой въ русской математической литературѣ собрать въ одно цѣлое лучшія изъ тѣхъ разнообразнѣйшихъ интересныхъ задачъ, которыя частью разбросаны въ многочисленныхъ учебникахъ, задачникахъ и журналахъ, а частью даже просто передаются изустно*).

Подобнаго рода задачи, для рѣшенія которыхъ требуется знаніе элементарной математики (въ предѣлахъ курса среднихъ учебныхъ заведеній), ярко разнятся отъ обыкновенно наполняющихъ различные русскіе задачники или странно-заданнымъ условіемъ (№№ 90, 36, 113), или нѣкоторой красотой разсужденія (№№ 112, 113) и изяществомъ рѣшенія данной задачи (№№ 128, 27, 114), или непредвидѣннымъ отвѣтомъ (№ 175).

Кромѣ того, мы нашли нужнымъ помѣстить здѣсь и такіе типы задачъ, которыхъ рѣшенія отличаются отъ обычныхъ или значительной трудностью (№№ 51, 44, 68) или нѣкоторой искусственностью (№№ 52, 75).

Всѣ приводимыя ниже задачи мы для удобства разбиваемъ на отдѣлы и придерживаемся, по возможности, строгой послѣдовательности. Въ первомъ отдѣлѣ мы помѣщаемъ задачи, рѣшаемыя чисто ариѳметическими пріемами; во второмъ отдѣлѣ помѣщены задачи алгебраическія, при чемъ большая часть ихъ относится къ рѣшенію и составленію ур-ій; далѣе слѣдуютъ задачи геометрическія, затѣмъ тригонометрическія и, наконецъ, задачи, требующія знанія нѣкоторыхъ статей изъ физики въ связи съ различными отдѣлами математики.

Въ концѣ каждаго изъ отдѣловъ мы помѣщаемъ нѣкоторые, соотвѣтствующіе этому отдѣлу, софизмы.

Такъ какъ каждая изъ задачъ имѣетъ тотъ или иной интересъ, а также и значительно разнится отъ рѣшенія задачъ обыкновенныхъ, то мы даемъ всѣмъ безъ исключенія задачамъ и софизмамъ подробное и, по возможности, ясное объясненіе.

---

*) Приблизительно соотвѣтствующими предлагаемому сборнику являются «Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики» Д. Горячева и А. Воронца, но, къ сожалѣнію, въ нихъ даны рѣшенія далеко не всѣхъ задачъ.

Думаемъ, что интересующимся вообще математикой будетъ не лишнимъ ознакомиться съ ея развитіемъ и прослѣдить шагъ за шагомъ тотъ ея путь, по которому она прошла сквозь рядъ тысячелѣтій прежде, чѣмъ стать на ту высоту, предъ которой невольно преклоняешься; вслѣдствіе этого мы предпосылаемъ задачамъ краткій очеркъ изъ исторіи развитія математики, для составленія котораго пользуемся преимущественно извѣстнымъ трудомъ проф. Кіевскаго университета Ващенко-Захарченко.

Предлагаемый сборникъ предназначается не только для любителей математики, но и для преподавателей, которымъ онъ можетъ служить, какъ пособіе къ иллюстраціи проходимаго въ классѣ курса математики.

Считаемъ своимъ долгомъ выразить глубокую благодарность за любезное сообщеніе нѣкоторыхъ задачъ преподавателю Брянской женской гимназіи Т. Ф. Сварычовскому.

Ниже приведенъ списокъ книгъ, послужившихъ намъ источниками при составленіи этого сборника.

М. Е. Ващенко-Захарченко. Исторія математики. Кіевъ 1883.

Шале. Исторія математики.

«Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики.»

Д. Горячевъ и А. Воронецъ. Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики. Москва 1903.

В Обреимовъ. Математическіе софизмы. С.-Пб. 1889. 2-ое изданіе.

Э. Люкасъ. Математическія развлеченія. Переводъ Обреимова. С.-Пб. 1883.

Б. Розенфельдъ. Искусственные способы рѣшенія задачъ низшей алгебры. С.-Пб. 1884.

А. Торнеусъ. Задачи элементарной математики. Москва 1880.

Н. Билибинъ. Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ.

Journal de mathématiques élémentaires.

И. Верещагинъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ.

И. Верещагинъ. Сборникъ алгебраическихъ задачъ.

Н. А. Шапошниковъ и Вальцовъ. Сборникъ алгебраическихъ задачъ.

Никульцевъ. Курсъ алгебры.

Приложенія къ журналу «Нива».

К. Д. Краевичъ. Физика.

Ковалевскій. Физика.

Гано. Физика.

И многіе другіе современные журналы и книги.

Краткій очеркъ изъ исторіи математики.

Исторія науки вообще есть и исторія прогресса; несмотря на то, что въ исторіи умственнаго развитія мы встрѣчаемъ временами застой, все-таки при опредѣленной высотѣ культуры умственныя пріобрѣтенія отличаются значительной прочностью.

При бѣгломъ взглядѣ на историческое развитіе математическихъ знаній видимъ, что иной разъ почти одновременно это развитіе идетъ то съ видимымъ преобладаніемъ индуктивнаго метода, то разрастается въ способность терпѣливаго наблюденія и собиранія фактовъ, съ преобладаніемъ дедукціи; поэтому нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что понадобилось много вѣковъ на то, чтобы собрать въ одно цѣлое ту массу отрывочныхъ познаній, которыя постепенно пріобрѣталъ человѣческій разумъ.

Математическія науки такъ же, какъ и другія многія области знанія, обязаны своимъ происхожденіемъ различнымъ теченіямъ человѣческой мысли, при чемъ одной изъ самыхъ главныхъ причинъ возникновенія примитивныхъ представленій въ области математики считаютъ образовавшееся постепенно понятіе о числѣ и мѣрѣ, лежащее въ основѣ какъ древней, такъ и современной математики.

Колыбелью математическихъ наукъ и цивилизаціи вообще, не безъ основаній, считается Востокъ, но ни одинъ еще ученый не могъ прослѣдить первыхъ шаговъ прогресса въ области математики. Нѣкоторые считаютъ исходнымъ пунктомъ Египетъ, другіе—Китай, Индію или Халдею, а иные указываютъ на какой-то древній, теперь уже вымершій, народъ, достигшій въ свое время высокой степени культуры. Какъ бы то ни было, но самые древніе изъ дошедшихъ до насъ памятниковъ математическаго развитія

древнихъ народовъ, большею частью, принадлежатъ египтянамъ и халдеямъ.

Начало математики вообще имѣетъ тѣсную связь съ развитіемъ философіи; но на какихъ бы основахъ ни возникла математика, важно то, что съ теченіемъ времени, находя извѣстныя свойства для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ и постепенно комбинируя ихъ, человѣчество могло вывести разнообразныя правила, придавъ имъ такимъ образомъ видъ нѣкоторой законности.

Подобнымъ образомъ, эмпирически, и возникла одна изъ самыхъ первыхъ и важныхъ отраслей математики — геометрія, которая была тѣсно связана какъ съ развитіемъ архитектуры, такъ и съ развитіемъ астрономіи и измѣреніемъ земель, при чемъ вопросъ, какимъ образомъ могла эта наука принять чисто умозрительную форму для насъ, вѣроятно, навсегда останется загадкой.

Зародыши геометрическихъ познаній относятъ въ Египетъ, откуда предполагаютъ ея переходъ къ грекамъ, гдѣ уже она и получила настоящее свое развитіе и приняла чисто научный характеръ, благодаря трудамъ философовъ Александрійской школы, каковы Архимедъ, Эвклидъ и другіе. Но прежде, чѣмъ перейти къ развитію математики въ Греціи, бросимъ бѣглый взглядъ на познанія болѣе древнихъ народовъ, каковы халдеи, египтяне; китайцы и т. п.

Халдеи. Какъ показали новѣйшія изслѣдованія, математическія знанія халдеевъ достигли значительнаго развитія въ древней Вавилоніи и Ассиріи, но, по недостатку матеріала, все-таки точнаго отчета объ ихъ знаніяхъ дать довольно затруднительно; извѣстно лишь, что различнымъ числамъ халдеи приписывали различныя мистическія свойства и значенія, которыя находили примѣненіе въ ихъ религіозныхъ и философскихъ воззрѣніяхъ. Каждый изъ халдейскихъ боговъ обозначался однимъ изъ цѣлыхъ чиселъ между 1 и 60 (у нихъ была 60-ричная система счисленія) и занималъ опредѣленное мѣсто на небѣ. Ряду цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствовалъ рядъ дробей, изъ которыхъ каждая дробь относилась къ извѣстному злому духу. Халдейскимъ астрономамъ были извѣстны ариѳметическая и геометрическая прогрессіи; кромѣ того, у нихъ существовали таблицы квадратовъ и кубовъ чиселъ.

О познаніяхъ халдеевъ въ алгебрѣ почти неизвѣстно; предполагаютъ все-таки, что имъ не безызвѣстно было рѣшеніе нѣкоторыхъ алгебраическихъ вопросовъ. Имъ, напр., было извѣстно рѣшеніе нѣкоторыхъ ур-ій первой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Геометрическія фигуры у нихъ имѣли значеніе гадательныхъ знаковъ; имъ были извѣстны параллельныя линіи, треугольникъ, квадратъ и т. п. Они умѣли дѣлить окружность на 6 равныхъ частей, знали приближенное отношеніе длины окружности къ діаметру ($\pi=3$) и т. д. Но главное вниманіе ихъ было обращено на астрономію; при наблюденіяхъ они пользовались приборами, похожими на астролябію; имъ былъ извѣстенъ гномонъ и т. п.

Вообще же математика народовъ древней Ассиріи и Вавилоніи, будучи связана съ различнаго рода мистическими воззрѣніями и толкованіями, не была приведена въ какую бы то ни было систему, вслѣдствіе чего она не могла достигнуть болѣе или менѣе значительнаго развитія.

Египтяне. О математическихъ познаніяхъ египтянъ мы знаемъ лишь по надписямъ на стѣнахъ египетскихъ храмовъ (въ Едфу) и по найденной древней рукописи, получившей названіе папируса Ринда. Изъ содержанія этого папируса видно, что египетскіе математики почти за 3000 лѣтъ до Р. Хр. достигли довольно значительныхъ результатовъ; они, напр., умѣли разлагать дроби на рядъ дробей съ числителями, равными единицѣ (ряды); имъ было извѣстно приведеніе дробей къ одному знаменателю; они умѣли рѣшать ур-ія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; имѣли понятіе и, весьма вѣроятно, знали свойства ариѳметическихъ и геометрическихъ прогрессій; умѣли находить приближенно площади равнобедреннаго треугольника и трапеціи; была даже сдѣлана попытка къ рѣшенію задачи на квадратуру круга; кромѣ того, мы видимъ у нихъ первые слѣды ученія о подобіи и пропорціональности, а также примѣненіе основныхъ двухъ тригонометрическихъ функцій, каковы косинусъ и тангенсъ.

Древніе египетскіе математики, подобно халдеямъ, не были чужды разнаго рода мистическихъ воззрѣній на различныя со-

отношенія между числами, и геометрическимъ фигурамъ придавали различныя мистическія толкованія.

Индусы. По словамъ одного арабскаго изслѣдователя, у индусовъ процвѣтали науки еще въ глубокой древности.

Изъ разсмотрѣнія ариѳметическихъ методовъ мы видимъ, что имъ были извѣстны четыре основныхъ дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней, правила смѣшенія, товарищества, сплавовъ, процентовъ и тройное правило (конечно, вся система индусской математики, какъ и системы другихъ народовъ древности, сильно разнилась отъ современной, когда уже она приняла вполнѣ обоснованную форму).

Изъ геометріи индусамъ было извѣстно сравнительно довольно много; они, какъ и греки (что мы увидимъ далѣе), старались рѣшить задачу на трисекцію угла, квадратуру круга и кубатуру; они знали многое изъ планиметріи и стереометріи.

Познанія по алгебрѣ были также у нихъ обширны. Любимымъ вопросомъ былъ отдѣлъ о неопредѣленномъ анализѣ (неопредѣленныя ур-ія); они рѣшали ур-ія первой и второй степени; знали извлеченіе корней; рѣшали нѣкоторые частные случаи ур-ій третьей степени; знали прогрессіи, а также и теорію соединеній (довольно основательно); имѣли нѣкоторое представленіе даже о приложеніи алгебры къ геометріи.

Изъ тригонометріи имъ были извѣстны основныя формулы, дуги приведенія, синусы и косинусы суммы и разности двухъ дугъ и т. п.; при этомъ изъ тригонометрическихъ величинъ они пользовались преимущественно синусомъ, косинусомъ и синусомъ верзусомъ (sn vers.). Имъ даже, по нѣкоторымъ свѣдѣніямъ, была извѣстна сферическая тригонометрія (начатки). Индусамъ также приписываютъ изобрѣтеніе современной нумераціи, неправильно называемой арабской.

Китайцы. Свѣдѣнія о развитіи математики въ Китаѣ весьма скудны; одно лишь можно сказать болѣе ими менѣе увѣренно, это то, что въ своихъ познаніяхъ они довольно сильно отстали отъ другихъ народовъ, хотя въ Китаѣ получили свое начало многія замѣчательныя открытія.

Отдѣльныхъ сочиненій по математикѣ въ китайской литературѣ не существовало, а въ каждомъ изъ сочиненій говорилось вообще о всѣхъ наукахъ. У одного изъ китайскихъ геометровъ мы встрѣчаемъ ариѳметическій треугольникъ, нѣкоторыя свойства котораго были еще раньше извѣстны арабамъ (въ XI вѣкѣ), и который былъ найденъ впослѣдствіи Паскалемъ. Наиболѣе же блестящихъ результатовъ китайскіе математики достигли въ неопредѣленномъ анализѣ.

Греки. Одной изъ самыхъ древнѣйшихъ философскихъ школъ Греціи считаютъ іонійскую (представителемъ которой является Ѳалесъ Милетскій), при чемъ полагаютъ, что въ ней математика, а въ особенности геометрія, совершенно не имѣла научнаго характера, но основывалась всецѣло на наглядномъ представленіи, замѣнявшемъ всѣ позднѣйшія доказательства.

Болѣе научно обосновалась геометрія въ пиѳагорейской школѣ, главная цѣль которой состояла въ изслѣдованіи различныхъ свойствъ чиселъ, которымъ приписывались мистическія значенія. Пиѳагоръ, основатель школы, различалъ четныя и нечетныя числа, квадратныя, треугольныя, пирамидальныя и т. п.; при этомъ въ его ученіи мы находимъ уже зародышъ теоріи прогрессій и рядовъ, а также начала ученія о пропорціяхъ, что впослѣдствіи дало возможность геометру Архиту рѣшить одну изъ основныхъ задачъ древнихъ грековъ, а именно—задачу на удвоеніе куба, которая была сведена къ отысканію средней пропорціональной.

Вообще же ко времени основанія школъ платоновской и аристотелевской геометрическая изобрѣтательность грековъ побѣдила трудность рѣшенія задачъ на квадратуру круга, трисекцію угла и кубатуру, которыя оказались возможными не съ помощью циркуля и линейки, а при помощи нѣкоторыхъ иныхъ кривыхъ, какъ, напр., открытой Диностратомъ квадратриксы и т. п.

Съ основаніемъ александрійской школы геометрія была возведена на высокую степень совершенства и получила ту законченность, которую она имѣетъ въ трактатѣ Эвклида «Начала».

Такимъ образомъ первоначальное развитіе геометрія полу-

чаетъ въ Малой Азіи у іонійцевъ, затѣмъ переходитъ въ южную Италію къ пиѳагорейцамъ, далѣе въ самый центръ Греціи—Аѳины (платоновская школа) и, наконецъ, въ Александрію.

Съ паденіемъ этой школы возникаетъ аѳинская, а затѣмъ византійская, указывающая упадокъ математическихъ наукъ, а съ паденіемъ и этихъ школъ прекращается вообще развитіе математики въ Греціи.

Какъ мы уже говорили, вполнѣ научный характеръ пріобрѣтается геометріей со временъ Эвклида, поставившаго математику въ ряды наукъ.

Эпоху процвѣтанія александрійской школы вообще можно считать золотымъ вѣкомъ въ развитіи греческой математики, такъ какъ съ ней связаны имена великихъ математиковъ, каковы: Архимедъ, Эвклидъ и Аполлоній Перигейскій.

Эвклидъ, главнымъ образомъ, сдѣлался извѣстнымъ благодаря упомянутому выше трактату по геометріи, въ связи съ изложеніемъ нѣкоторыхъ понятій изъ ариѳметики, значительно способствовавшихъ ясности представленія; важнѣе же всего развитіе Эвклидомъ новыхъ методовъ, какъ, напр., ученіе о данныхъ величинахъ (рѣшеніе ур-ій), теорія чиселъ, несоизмѣримыя величины, правильныя тѣла и т. п.; при этомъ въ ученіи о данныхъ величинахъ не трудно усмотрѣть первые зародыши аналитической геометріи, впослѣдствіи развитой Декартомъ. Въ этомъ же трактатѣ мы находимъ теорію пропорцій, отысканіе дѣлителей и кратныхъ данныхъ чиселъ, а также термины: плоское число, квадратное, кубичное, тѣлесное и т. п. Въ ученіи о несоизмѣримыхъ величинахъ мы встрѣчаемъ основанія теоріи исчерпываній, которая замѣняла древнимъ современную теорію безконечно-малыхъ и послужила вмѣстѣ съ открытой въ XVI вѣкѣ задачей «о проведеніи касательныхъ къ кривымъ» основой развитія дифференціальнаго исчисленія.

Другой представитель александрійской школы, жившій въ III вѣкѣ до Р. Хр., Архимедъ можетъ по заслугамъ назваться величайшимъ математикомъ древности. По свидѣтельству Плутарха, древніе изумлялись той ясности въ доказательствахъ Архимеда, съ которой онъ ближе всего подошелъ къ новѣй-

шимъ методамъ и теоріямъ. Главныя заслуги его состоятъ въ томъ, что онъ далъ впервые методъ, сходный съ методомъ предѣловъ, и съ его помощью открылъ множество теоремъ, а такъ же подробно изучилъ коническія сѣченія и другія кривыя въ связи съ получаемыми вслѣдствіе ихъ вращенія тѣлами, называвшимися коноидами и сфероидами и носящими въ современной математикѣ термины: параболоидъ вращенія, эллипсоидъ вращенія и т. п. Разсѣкая эти тѣла вращенія параллельными плоскостями и пользуясь теоріей предѣловъ, Архимедъ рѣшилъ вопросъ о кубатурѣ тѣлъ, послужившей основой теоріи опредѣленныхъ интеграловъ. Въ его сочиненіи «О числѣ песчинокъ» мы находимъ первую идею десятичной системы счисленія. При многочисленныхъ вычисленіяхъ, встрѣчающихся въ этомъ сочиненіи, Архимедъ пользуется ариѳметической и геометрической прогрессіями. Сравненіе этихъ прогрессій впослѣдствіи привело Непера къ открытію логариѳмовъ. У Архимеда также мы находимъ методъ безконечно-малыхъ въ связи съ теоріей предѣловъ. Кромѣ того, ему приписываютъ много изобрѣтеній въ области механики.

Почти въ одно время съ Архимедомъ жилъ знаменитый геометръ Аполлоній Перигейскій, прославившійся главнымъ образомъ, трактатомъ «о коническихъ сѣченіяхъ», въ которомъ, между, прочимъ встрѣчаемъ вопросъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ.

Во второмъ вѣкѣ до Р. Хр. великій астрономъ Гиппархъ положилъ начало математической астрономіи; для астрономическихъ вычисленій онъ пользовался прямолинейной и сферической тригонометріей, основы которой имъ были изложены въ сочиненіи «О восхожденіи и захожденіи свѣтилъ». Кромѣ того, ему приписываютъ нахожденіе стереографической проекціи и также приложеніе геометріи къ астрономіи.

Въ серединѣ II вѣка по Р. Хр. въ Греціи славится астрономъ и геометръ Птоломей, извѣстный своей системой движенія небесныхъ тѣлъ и нѣкоторой разработкой теоріи координатныхъ осей.

Далѣе мы встрѣчаемъ самаго виднаго представителя второй александрійской школы Діофанта, не безъ основанія считаемаго творцомъ алгебры.

Въ исторіи алгебры различаютъ три періода: 1) алгебру риторическую — самую низкую ея ступень, когда еще всѣ дѣйствія и величины выражались словами и не существовало никакихъ символовъ; 2) алгебру синкопическую — вторую ступень ея развитія; въ этотъ періодъ начинаютъ сокращать слова, и появляются нѣкоторые знаки, и 3) алгебру символическую — послѣднюю ступень ея развитія, гдѣ всѣ дѣйствія безъ исключенія изображаются посредствомъ символовъ.

Діофантъ былъ первый, рѣшившій ур-іе второй степени алгебраическимъ путемъ, такъ какъ ранѣе эти ур-ія рѣшались чисто геометрическимъ построеніемъ. Съ Діофантомъ математика грековъ слѣдуетъ новому направленію, при которомъ главную роль играетъ алгебра, а геометріи отводится уже второе мѣсто. Такое измѣненіе направленія въ теченіе развитія математики повторяется довольно часто; такъ, Пиѳагоръ однимъ изъ первыхъ изслѣдуетъ свойства чиселъ; свою теорему о квадратѣ, построенномъ на гипотенузѣ, онъ прилагаетъ къ числамъ и вводитъ такимъ образомъ нѣкоторую связь между геометріей и ариѳметикой, которая раздѣлялась на двѣ части, составлявшихъ двѣ совершенно различныя науки. Ариѳметикой вообще называлась наука о числахъ, т.-е. объ изслѣдованіи свойствъ чиселъ и раздѣленіи ихъ на классы. Греческая же ариѳметика — наука чисто теоретическая; въ такомъ духѣ и написаны были у грековъ всѣ ариѳметики, изъ которыхъ самой обстоятельной является ариѳметика Никомаха. Другая часть ариѳметики носила названіе практической или логистики.

Начиная съ Эвклида, ариѳметика принимаетъ чисто научный характеръ, хотя и чисто геометрическій, такъ какъ всѣ свойства чиселъ объясняются на линіяхъ, площадяхъ и т. п. Такой характеръ ариѳметика сохраняетъ до Никомаха, который излагаетъ ее безъ посредства геометріи, такъ что у него она является вполнѣ наукой о числахъ.

Со времени Никомаха вся математическая литература принимаетъ ариѳметическій характеръ вплоть до начала XIII столѣтія, когда Фибоначчи знакомитъ европейцевъ съ алгеброй арабовъ; съ этого момента математика принимаетъ алгебраическое направленіе, которому слѣдуетъ до XVI вѣка, когда начинаютъ инте-

ресоваться трудами Діофанта, изученіе которыхъ даетъ толчекъ къ усовершенствованію методовъ неопредѣленнаго анализа, но съ появленіемъ метода дифференціаловъ неопредѣленный анализъ снова забрасывается до тѣхъ поръ, пока Эйлеръ не обращаетъ на него главное вниманіе, чѣмъ и полагаетъ начало окончательному его изслѣдованію, благодаря трудамъ математиковъ XIX вѣка, каковы Лагранжъ, Гауссъ, Якоби и др.

Блестящее развитіе наукъ у ученыхъ александрійской школы во время упадка Римской имперіи, гдѣ математическія познанія были значительно слабѣе греческихъ, такъ какъ у римлянъ она существовала лишь для практическихъ примѣненій, останавливается въ VI столѣтіи по Р. Хр.

Съ введеніемъ христіанской религіи быстро прекращается развитіе математики. Христіане, благодаря своему колоссальному невѣжеству и фанатизму, безъ разбора истребляютъ всѣ сочиненія язычниковъ, стремясь распространить повсемѣстно евангеліе. Въ эту эпоху погибаютъ замѣчательнѣйшіе памятники древней культуры, и только 800 лѣтъ спустя начинается развитіе наукъ въ Европѣ.

Арабы. Въ это время появляются арабы; основанная ими столица Багдадъ дѣлается центромъ цивилизаціи, и въ промежутокъ времени между IX и XIII вѣками создается обширная математическая литература, основы которой были, большею частью, заимствованы у грековъ.

Сравнивая оставшіеся послѣ арабовъ памятники по математикѣ и астрономіи, мы видимъ, что ихъ ученые превзошли во многомъ греческихъ. Главныя заслуги арабовъ состоятъ въ томъ, что они поставили тригонометрію въ ряды математическихъ наукъ. Греческая тригонометрія носитъ чисто геометрическій характеръ, а у арабовъ характеръ тригонометріи — чисто алгебраическій. Арабы первые ввели тангенсъ, какъ самостоятельную величину, а также котангенсъ, секансъ и косекансъ, о которыхъ до нихъ нигдѣ не упоминается; кромѣ того, ими были построены тригонометрическія таблицы для тангенсовъ и котангенсовъ.

Изъ числа самостоятельныхъ трудовъ арабовъ упомянемъ введеніе ими трехъ или четырехъ основныхъ предложеній, которыя лежатъ въ основѣ тригонометріи; введеніе синусовъ дугъ вмѣсто

двойныхъ хордъ; научное обоснованіе приложенія алгебры къ геометріи; рѣшеніе нѣкоторыхъ ур-ій 3-й степени и т. п.

Средніе и новые вѣка. Съ IV вѣка, какъ мы уже говорили, прекращается самостоятельное развитіе геометріи; Діофантъ полагаетъ новое направленіе въ развитіи математическихъ наукъ; на сцену является алгебра, первые слѣды которой мы видимъ у египтянъ, ассиро-вавилонянъ, индусовъ, китайцевъ и арабовъ.

Сначала развитіе алгебры идетъ медленно и слабо, и только съ XVI столѣтія она начинаетъ дѣлать неимовѣрные успѣхи, при чемъ центръ развитія ея переходитъ въ Италію, гдѣ она уже и достигаетъ той высоты, на которой стоитъ въ настоящее время.

Въ XVI вѣкѣ начинаютъ прилагать алгебру къ геометріи, которая вслѣдствіе этого получаетъ совершенно иной характеръ и необыкновенную общность; изъ науки конкретной она дѣлается наукой отвлеченной, глазъ перестаетъ участвовать въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, чертежъ перестаетъ имѣть значеніе, а всѣ теоремы выражаются отвлеченной комбинаціей символовъ, которые продолжаютъ существовать и въ то время, когда теорема исчезаетъ для глаза при извѣстномъ положеніи данныхъ протяженій. Тамъ, гдѣ древніе геометры, руководимые глазомъ, теряли теорему и должны были доказывать ее отдѣльно для различныхъ случаевъ, алгебра даетъ ее всегда въ одной и той же комбинаціи символовъ.

Каждую геометрическую теорему или задачу старались выразить съ помощью алгебраическихъ комбинацій и обратно, каждую алгебраическую комбинацію символовъ старались выразить, по возможности, конкретнымъ геометрическимъ представленіемъ. Отсюда вытекла аналитическая геометрія и построеніе алгебраическихъ выраженій, а также и начертательная геометрія, истиннымъ основателемъ которой былъ Гаспаръ Монжъ.

Математики среднихъ вѣковъ смотрятъ на алгебру, какъ на чисто теоретическую науку. Съ постепеннымъ ея развитіемъ и попытками приложить къ геометріи, математика дѣлаетъ большіе успѣхи особенно въ эпоху возрожденія наукъ на западѣ. Самыхъ блестящихъ результатовъ достигаютъ математики Италіи,

изъ которыхъ болѣе видными представителями являются: Леонардо-да-Винчи, Пачіоли, Ферро, Тарталіа, Кардано и другіе.

Съ самаго начала XVI вѣка алгебра и геометрія идутъ параллельно, дополняя и поясняя другъ друга, при чемъ собственно алгебра становится уже наукой объ уравненіяхъ.

Первоначально ур-ія изображались въ видѣ равенства двухъ положительныхъ количествъ, при чемъ приравниваніе ур-ія нулю и перенесеніе всѣхъ значащихъ членовъ въ одну часть начинаются лишь съ XVI вѣка. При рѣшеніи ур-ій о мнимыхъ корняхъ не было совершенно никакого представленія такъ же, какъ и объ отрицательныхъ корняхъ. Это понятіе выработалось уже впослѣдствіи и пріобрѣло вполнѣ законченную форму лишь съ появленіемъ теоріи мнимыхъ количествъ.

Рѣшать ур-ія 1-й и 2-й степени умѣли еще древніе народы, такъ что въ средніе вѣка, большею частью, занимались рѣшеніемъ ур-ій степени выше 2-й, а также обобщеніемъ уже извѣстныхъ ранѣе для частныхъ случаевъ нѣкоторыхъ алгебраическихъ положеній.

Первый шагъ къ рѣшенію такихъ ур-ій былъ сдѣланъ итальянскимъ математикомъ Тарталіа и болонскимъ математикомъ Ферро.

Въ этомъ же вѣкѣ Кардано открываетъ мнимые корни кубичнаго ур-ія и то, что такіе корни всегда встрѣчаются парами.

Далѣе французскій протестантъ Віэтъ вводитъ новый алгебраическій языкъ (символы), лежащій въ основѣ современной математики. Кромѣ того, онъ рѣшаетъ предложенное папой Адріаномъ ур-іе 45-й степени (частный случай), который сводитъ къ геометрическому построенію, а также рѣшаетъ кубичныя ур-ія, стараясь ихъ привести къ ур-ію 6-й степени вида: $x^6 \pm x^3 = a$, которое нетрудно рѣшить, полагая $x^3 = y$.

Значительный шагъ въ теоріи ур-ій дѣлаетъ Гаріоттъ. Онъ первый начинаетъ приравнивать одну часть ур-ія нулю. Это небольшое отступленіе отъ предшествующихъ теорій приводитъ его къ открытію свойства ур-ія, по которому оно можетъ быть разложено на множителей первой степени; вслѣдствіе этого открытія удалось рѣшить многія ур-ія, до этого не рѣшаемыя.

Изъ числа математиковъ, изучавшихъ теорію ур-ій, нельзя не упомянуть знаменитаго астронома Кеплера.

Къ концу XVI столѣтія шотландскій баронъ Неперъ открываетъ теорію логариѳмовъ, которая даетъ возможность, главнымъ образомъ, извлекать корни любыхъ степеней изъ любыхъ количествъ, а также упрощаетъ и многія другія алгебраическія вычисленія.

Въ XVIII вѣкѣ въ математической наукѣ замѣчается совершенно новое теченіе, первый толчокъ которому былъ данъ открытой Декартомъ аналитической геометріей, въ основѣ которой лежитъ такъ называемый методъ координатъ.

Вслѣдъ за этимъ Кавальери и Ферма дѣлаютъ первые шаги къ открытію методовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, рѣшая аналитически вопросъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ. Еще ближе къ новѣйшимъ методамъ приближается учитель Ньютона, Барроу, но настоящими творцами высшаго анализа являются Ньютонъ и Лейбницъ. Въ то время какъ Лейбницъ, исходя изъ философскихъ началъ, даетъ аналитическое основаніе дифференціальному исчисленію, Ньютонъ исходитъ изъ широкаго пониманія явленій, началъ механики и астрономіи, и открываетъ законы тяготѣнія, теорію свѣта и т. д. и, наконецъ, теорію флюксій, сходную съ дифференціальнымъ исчисленіемъ Лейбница.

Такимъ образомъ успѣхи, сдѣланные итальянскими математиками въ XIV и XV вѣкахъ, сильно способствуютъ дальнѣйшему развитію всѣхъ отраслей математики.

Такъ, Віэтъ вводитъ символы и рѣшаетъ буквенныя ур-ія, Коперникъ предлагаетъ систему міра, Гаріоттъ изслѣдуетъ свойства ур-ій, Кеплеръ изучаетъ движеніе небесныхъ свѣтилъ, Неперъ открываетъ логариѳмы, Галилей и его ученикъ Торичелли дѣлаютъ множество открытій въ области физики и механики, Кавальери полагаетъ первыя основы интегральнаго исчисленія при помощи метода недѣлимыхъ.

Далѣе въ XVIII вѣкѣ Декартъ создаетъ аналитическую геометрію, Паскаль усовершенствуетъ геометрію, Ферма изслѣдуетъ maximum и minimum, Роберваль излагаетъ теорію касательныхъ, и, наконецъ, Ньютонъ и Лейбницъ открываютъ дифференціальное исчисленіе.

Ариѳметика.

1. По стѣнѣ, высота которой 20 футовъ, ползетъ улитка. Начавъ ползти съ основанія стѣны въ 12 часовъ дня, она каждыя сутки съ 12-ти часовъ дня до 12-ти часовъ ночи поднимается на 4 фута, а съ 12-ти часовъ ночи до 12-ти часовъ дня опускается на 3 фута. Черезъ сколько времени улитка при данныхъ условіяхъ доползетъ до верху стѣны?

2. Нѣкто, купивъ въ магазинѣ шляпу за 15 рублей, уплатилъ продавцу двадцатипятирублевый кредитный билетъ. Продавецъ, размѣнявъ данный ему билетъ у сосѣда, отдалъ покупателю 10 руб. сдачи. Черезъ нѣкоторое время къ продавцу приходитъ сосѣдъ и заявляетъ, что полученный имъ для размѣна билетъ — фальшивый, вслѣдствіе чего онъ возвращаетъ его продавцу и получаетъ въ обмѣнъ настоящую двадцатипятирублевку. Сколько убытку понесъ продавецъ?

3. Портной имѣетъ кусокъ сукна въ 10 аршинъ и каждый день отрѣзаетъ по 1 аршину. На который день отъ отрѣжетъ послѣдній разъ?

4. Желѣзная дорога въ два пути соединяетъ противоположныя станціи A и B. Каждый часъ съ обоихъ концовъ одновременно выходитъ по поѣзду. Сколько по пути встрѣтится поѣздовъ, если ѣхать отъ A къ B, зная, что ѣзды между этими станціями ровно сутки?

5. Раздѣлить 7 апельсиновъ на 12 равныхъ частей при условіи, чтобы каждый апельсинъ рѣзать меньше, чѣмъ на 12 частей.

6. Гиря въ 1 пудъ была разбита на такія четыре части, что съ ихъ помощью можно было взвѣшивать грузы вѣсомъ отъ 1 до 40 фунтовъ (въ цѣлыхъ числахъ фунта). Какой вѣсъ имѣли эти части?

7. Одинъ торговецъ при оптовой продажѣ своего товара дѣлаетъ съ назначенной на товаръ цѣны скидку въ 7% и, кромѣ того, въ случаѣ продажи на наличныя деньги, еще дѣлаетъ уступку въ 12% съ пониженной цѣны. Другой торговецъ дѣлаетъ скидку въ 12% съ назначенной и, кромѣ того, 7% съ пониженной цѣны при одинаковыхъ съ первымъ торговцемъ прочихъ условіяхъ. У котораго изъ нихъ выгоднѣе покупать товаръ на наличныя деньги?

8. Два ученика купили у торговца 8 яблокъ, при этомъ первый ученикъ заплатилъ 5, а второй 3 копейки. Встрѣтивъ по дорогѣ товарища, они втроемъ съѣли всѣ 8 яблокъ, при чемъ каждый съѣлъ одну и ту же порцію. За это встрѣтившійся товарищъ далъ имъ 8 копеекъ. Какъ купившіе яблоки два ученика должны раздѣлить полученныя ими деньги?

9. Изъ двухъ станцій, разстояніе между которыми 240 верстъ, выѣзжаютъ два автомобиля навстрѣчу другъ другу съ одинаковой скоростью 30 верстъ въ часъ. Одновременно съ выѣздомъ автомобилей вылетаетъ съ одной изъ станцій голубь со скоростью 40 верстъ въ часъ по тому же направленію до встрѣчи со вторымъ автомобилемъ; затѣмъ онъ тотчасъ же поворачиваетъ назадъ и летитъ до встрѣчи съ первымъ, послѣ чего снова поворачиваетъ назадъ и летитъ до встрѣчи со вторымъ и т. д. продолжаетъ до тѣхъ поръ, пока автомобили не встрѣтятся. Полагая путь между станціями прямолинейнымъ, опредѣлить, сколько верстъ пролетитъ голубь.

10. Нѣкто завѣщалъ капиталъ въ 14000 рублей своей женѣ при условіи, что если у нея родится мальчикъ, то сынъ долженъ получить вдвое больше матери, а если родится дочь, то мать должна получить вдвое больше дочери. Родились близнецы: сынъ и дочь. Какъ было исполнено завѣщаніе?

11. Отцу 45 лѣтъ, а сыну 10. Черезъ сколько времени ихъ возрасты будутъ относиться, какъ 9 : 4?

12. Куплено 5 столовыхъ и 7 чайныхъ ложекъ и за все заплачено 56 руб.; въ другой разъ по тѣмъ же цѣнамъ было куплено 10 столовыхъ и 3 чайныхъ ложки, и тогда заплачено было 79 рублей. Почемъ покупали каждую столовую и чайную ложки?

13. Въ двухъ боченкахъ было неравное число ведеръ вина. Чтобы сдѣлать поровну, поступили такъ: сначала изъ перваго боченка перелили во второй столько ведеръ, сколько ихъ было во второмъ; затѣмъ перелили изъ второго въ первый столько, сколько въ этомъ послѣднемъ оставалось послѣ перваго переливанія. Послѣ этого въ каждомъ боченкѣ стало по 24 ведра. Сколько ведеръ было первоначально въ каждомъ боченкѣ?

14. Четыремъ лицамъ были розданы яблоки слѣдующимъ образомъ: первому третью часть всего количества яблокъ и еще 16 штукъ, второму $^1/_3$ того, что осталось послѣ перваго, и еще 16 штукъ, третьему $^1/_3$ того, что осталось послѣ второго, и еще 16 штукъ и четвертому $^1/_3$ того, что осталось послѣ третьяго и еще послѣднія 16 штукъ. Сколько всего яблокъ было роздано?

15. Ящикъ вмѣщаетъ 4 фунта изюма или 6 фунтовъ миндалю. Если его наполнить и тѣмъ и другимъ на одинаковыя суммы, то содержимое будетъ вѣсить $4^1/_2$ фунта и стоить 1 руб. 8 коп. Что стоитъ фунтъ миндалю и изюма?

16. Опредѣлить моментъ между 1 часомъ и 2 часами, когда минутная стрѣлка часовъ покрываетъ часовую.

17. На памятникѣ Діофанта находится слѣдующая надпись «Прохожій! Подъ симъ камнемъ покоится прахъ Діофанта, умершаго въ старости. Шестую часть его жизни заняло дѣтство, двѣнадцатую — отрочество, седьмую — юность. Затѣмъ протекла половина его жизни, послѣ чего онъ женился. Черезъ пять лѣтъ у него родился сынъ; а когда сыну минуло 4 года, Діофантъ скончался. Скажи, сколькихъ лѣтъ онъ умеръ?

18. Пассажирскій пароходъ, идя вверхъ по теченію рѣки, проходитъ разстояніе между городами A и B въ 4 часа 30 минутъ, а обратно въ 3 часа. Во сколько времени при тѣхъ же условіяхъ проплыветъ то же разстояніе боченокъ, брошенный по теченію рѣки въ мѣстѣ A?

19. Два поѣзда по параллельнымъ путямъ движутся другъ другу навстрѣчу, одинъ со скоростью 30 верстъ въ часъ, а другой со скоростью 40 верстъ въ часъ. Пассажиръ, сидящій во второмъ поѣздѣ, замѣтилъ, что первый поѣздъ шелъ мимо него въ теченіе 6 секундъ. Какова длина перваго поѣзда?

20. Изъ мѣдныхъ колецъ, изъ которыхъ каждое толщиною въ $^1/_2$ вершка, сдѣлано 2 цѣпи, длиною въ 2 арш. 11 вершк. и въ 3 арш. 9 вершк. Опредѣлить число колецъ въ каждой цѣпи, если извѣстно, что во второй ихъ было на 15 болѣе.

21. Первыя девять цифръ, напечатанныя на отдѣльныхъ билетахъ, были розданы тремъ лицамъ, по три каждому. Изъ этихъ цифръ каждое лицо составило наименьшее трехзначное число и записало его; кромѣ того оказалось, что сумма цифръ у каждаго была одна и та же. Послѣ этого билеты были снова смѣшаны и розданы такимъ же образомъ, при чемъ оказалось, что каждый получилъ по одной цифрѣ, уже бывшей у него вначалѣ, и что сумма полученныхъ каждымъ цифръ была опять одинакова. Послѣ этого каждое лицо сложило оба записанныя имъ трехзначныя числа, и у всѣхъ сумма была равна 516. Какія цифры были у каждаго въ первый и второй разъ?

22. Если нѣкоторое число мѣдныхъ копеекъ расположить въ видѣ квадрата, то 5 копеекъ останутся лишними; если же сторону этого квадрата увеличить на одну копейку, то нехватитъ 8 монетъ. Опредѣлить число раскладываемыхъ монетъ.

23. Найти двузначное число, сумма цифръ котораго 13, а разность между искомымъ числомъ и обратнымъ ему, т.-е. числомъ, которое получится, если мы цифру единицъ искомаго числа поставимъ на мѣсто цифры десятковъ, а цифру десятковъ на мѣсто цифры единицъ, выражается числомъ, цифра единицъ котораго есть 7.

24. Купецъ пріобрѣлъ 11 шерстяныхъ платковъ, по 3 руб. 50 коп. за каждый. Нѣсколько изъ нихъ онъ продалъ, взявъ за каждый проданный платокъ столько лишнихъ полтинниковъ, сколько платковъ осталось непроданными. Опредѣлить число проданныхъ платковъ, зная, что онъ выручитъ сумму, равную затраченной на покупку всѣхъ платковъ.

25. Найти трехзначное число, зная, что сумма всевозможныхъ двузначныхъ чиселъ, составленныхъ изъ цифръ этого числа, равна удвоенному искомому трехзначному числу.

26. Найти наименьшее число, дающее при дѣленіи на 11 и на 13 въ остаткѣ 1, а при дѣленіи на 17 въ остаткѣ 11.

27. Ученикъ правильно перемножилъ на доскѣ два числа—

пятизначное на трехзначное, но нечаянно стеръ нѣкоторыя цифры такъ, что у него осталось слѣдующее:

```
    *7***
      743
  -------
   *****5
  ******
 ******
 -------
 42***87*
```

Мѣста стертыхъ цифръ обозначены звѣздочками. Возстановить по этимъ даннымъ множимое и произведеніе.

28. Для нумераціи страницъ книги потребовалось 2775 цифръ. Опредѣлить число страницъ въ книгѣ.

29. Сколько потребовалось цифръ для того, чтобы перенумеровать книгу въ 1500 страницъ?

30. Какой знакъ надо поставить между написанными рядомъ числами 4 и 5, чтобы получить число большее 4 и меньшее 5?

31. Доказать, что всякое число есть сумма различныхъ степеней двухъ или эта сумма, сложенная съ единицей.

32. Представить дробь $\frac{155}{256}$ въ видѣ дроби, аналогичной десятичной, но написанной по восьмеричной системѣ счисленія.

33. Перемножить числа 235 и 433, написанныя по семиричной системѣ счисленія, не переводя ихъ въ десятичную. (Разумѣется, что произведеніе будетъ написано также по семиричной системѣ.)

34. Доказать, что число 144 будетъ точнымъ квадратомъ во всякой системѣ счисленія.

35. Доказать, что число 1331 будетъ точнымъ кубомъ во всякой системѣ счисленія.

36. *Задача Ньютона.* На лугу въ 20 акровъ (1 акръ равенъ 43560 кв. фут.) паслись 120 коровъ; онѣ въ 16 дней поѣли всю бывшую первоначально на немъ траву, а равно и ту, которая вновь вырастала въ теченіе этихъ 16 дней. На другомъ лугу въ $3^1/_2$ акра паслись 20 коровъ; онѣ въ 18 дней поѣли первоначально выросшую на этомъ лугу траву, а равно и ту, которая вновь вырастала на немъ въ теченіе этихъ 18 дней. Предполагая, что каждая корова съѣдала ежедневно оди-

наковое количество травы, что трава вырастала на лугахъ пропорціонально времени и одинаково на всѣхъ лугахъ и что первоначальное количество травы на единицѣ поверхности каждаго луга было одно и то же, вычислить, сколько можно было пустить коровъ на пастбище въ 14 акровъ, чтобы онѣ при тѣхъ же условіяхъ могли прокормиться въ теченіе 12 дней.

37. Торговка имѣла на базарѣ въ двухъ корзинахъ яблоки, въ каждой по 30 штукъ. Изъ одной она продавала 2 яблока на 1 коп., а изъ другой 3. Изъ первой корзины она, продавая 2 яблока на 1 коп., продастъ всѣ 3 десятка за 15 коп., а изъ другой — всѣ за 10 коп. Такимъ образомъ всѣ 60 яблокъ въ обѣихъ корзинахъ стоятъ 25 коп. Такъ какъ она, взявъ изъ одной корзины 2 яблока на 1 коп., а изъ другой 3 яблока на 1 коп., полученный такимъ образомъ пятокъ должна была продать за 2 коп., т.-е. десятокъ за 4 коп., то и рѣшила, смѣшавъ оба сорта, продавать всѣ 60 яблокъ по 4 коп. десятокъ. Послѣ продажи оказалось, что она выручила всего 24 коп. $[(60 : 10) \times 4]$, а не 25 коп., какъ она разсчитывала. Куда дѣвалась копейка?

Алгебра.

Рѣшить слѣдующія уравненія:

38. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots \text{ad inf.}}}}=2.$

39. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots \text{ad. inf.}}}}=2.$

40. $\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots \text{ad inf.}}}}+$

$+\sqrt{2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x-\ldots \text{ad inf.}}}}=1.$

41. $\sqrt[-3]{146-\sqrt[0,1x]{9261}}=0,2.$

42. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$

43. $x^4+(x-1)^4=17.$

44. $x^4+x=30+2x^3.$

45. $x^3-15x^2+20x-6=0.$

46. $x^3-9x^2+26x-30=0.$

47. $x^3-5x^2+8x-6=0.$

48. $(x-1)(x-3)(x-4)=72.$

49. $\sqrt[3]{x-1}=x-7.$

50. $x^3-x-336=0.$

51. $9x^3-13x-6=0.$

52. $6x^5-41x^4+97x^3-97x^2+41x-6=0.$

53. $x^6-3x^5-40x^4+x^3-3x^2-40x=0.$

54. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0.$

55. $x^2-2=\sqrt{x+2}.$

56. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=2.$

57 *). $x^3+4x^2+6x+4=0.$

Рѣшить слѣдующія системы ур-ій:

58. $x^2+y=18;\quad x+y^2=8.$

59. $\begin{cases}8y(x+y+\sqrt{x^2-y^2})=9(x+y)(x+y-\sqrt{x^2-y^2}).\\(x^2-y)^2+(x-y)-506=2x(x^2+y).\end{cases}$

60. $x^2+xy=35;\quad xy-2y^2=2.$

61. $x^2+2y^2=22;\quad xy+3y^2=33.$

62. $\frac{x^2+xy}{y^2}+\frac{y^2+xy}{x^2}=6\frac{3}{4};\quad x+y=6.$

63. $x^5+y^5=3^2/_3(x^3+y^3);\quad xy=2.$

64. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$

65. $x^3-y^2=3086;\quad y^2-x=274.$

Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленныя ур-ія:

66. $8x+12y+15z=75.$

67. $4x^2-3xy-y=20.$

68. $3x^2-2xy-6x+9y=24.$

69. $x^2-2xy-2x+3y+3=0.$

70. Опредѣлить раціональныя величины для x и y въ ур-іи:

$$x^y=y^x \text{ (задача Эйлера).}$$

71. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ ур-іе:

$$x^{y-x}=y^x.$$

72. Рѣшить показательное ур-іе:

$$2^{3x}3^{2x-3}=5^{x-2}7^{2-3x}.$$

73. Опредѣлить x изъ ур-ія: $x^x=4$ строго-алгебраическимъ путемъ.

74. Рѣшить ур-іе: $2^x=4x.$

---

*) Рѣшить посредствомъ введенія посторонняго корня.

75. Опредѣлить неизвѣстныя изъ ур-ій:

$$A_x^y = 10A_x^{y-1}; \quad 3C_x^y = 5C_x^{y-1},$$

гдѣ A_x^y указываетъ, что изъ x элементовъ сдѣланы размѣщенія по y въ каждой группѣ, а C_x^y — сочетанія изъ x по y.

76. Упростить выраженіе:

$$3\sqrt{3} + \sqrt{43 - 24\sqrt{3}},$$

не прибѣгая къ извлеченію корней и формулѣ $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

77. Упростить $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

78. Найти безъ помощи логариѳмовъ величину выраженія:

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{189}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{189}}.$$

79. Сократить дробь:

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

(не производя дѣленія).

80. При какихъ условіяхъ многочленъ: $x^4+8x^3+4x^2-49x+38$ будетъ точнымъ квадратомъ?

81. Безъ помощи таблицъ вычислить логариѳмъ 2 по основанію 5 съ точностью не меньше $^1/_{40}$.

82. Найти $\lg 125$, если $\lg 2 = m$.

83. Имѣя какую-либо таблицу логариѳмовъ и не зная, по какому основанію онѣ вычислены, опредѣлить числа, кратныя основанію, пользуясь только данной таблицей.

84. Найти характеристику логариѳма 11 по основанію 4.

85. Написать коэффиціентъ при x^4 въ разложеніи

$$(1+x+x^2)^3.$$

86. Обратить $\sqrt{a^2+1}$ въ непрерывную дробь.

87. Почему корни ур-ія: $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$ не удовлетворяютъ самому ур-ію?

88. Дано, что x измѣняется пропорціонально y и z, а y измѣняется пропорціонально $(x+z)$, при этомъ $x=2$, если $z=2$. Каково будетъ значеніе z, если $x=9$?

89. Дано, что y измѣняется какъ сумма двухъ величинъ, изъ которыхъ одна мѣняется какъ x, а другая—обратно x, и что $y=4$, когда $x=1$ и $y=5$, когда $x=2$. Какова зависимость между x и y?

90. Уничтожить радикалы въ ур-іи:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}-1=0.$$

91. Опредѣлить одинъ корень и зависимость между двумя другими въ кубичномъ ур-іи вида $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, если извѣстно, что коэффиціенты его находятся въ такой зависимости, что отъ умноженія всего ур-ія на нѣкоторый множитель $x+m$ получается возвратное ур-іе вида $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$.

92. Найти два количества, изъ которыхъ каждое было бы равно квадрату другого (первыя степени этихъ количествъ неравны).

93. Найти два количества, изъ которыхъ каждое въ квадратѣ было бы равно отрицательному другому.

94. Найти два такихъ цѣлыхъ числа, сумма которыхъ равна ихъ произведенію.

95. Найти двѣ дроби, сумма которыхъ равна ихъ произведенію.

96. Найти цѣлое двузначное число, которое въ 9 разъ болѣе цифры его единицы.

97. Найти двузначное число, равное удвоенному произведенію его цифръ.

98. Найти трехзначное число, изображеніе котораго въ плоскомъ зеркалѣ будетъ въ 7,41(6) раза болѣе самого числа.

99. Найти два цѣлыхъ и положительныхъ числа, разность между которыми равна ихъ удвоенному частному.

100. Найти трехзначное число, зная, что, будучи уменьшено въ 5 разъ, оно равно числу, состоящему изъ двухъ послѣднихъ цифръ искомаго числа.

101. Найти двузначное число, равное произведенію суммы его цифръ на ихъ разность.

102. Найти наименьшее число, равное учетверенному произведенію его цифръ.

103. Найти три цѣлыхъ числа, сумма квадратовъ которыхъ была бы равна квадрату даннаго.

104. Какова должна быть разностная прогрессія, чтобы сумма ея членовъ равнялась ихъ числу?

105. Сколько находится одинаковыхъ членовъ въ двухъ ариѳметическихъ прогрессіяхъ:

$$\div 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27.$$
$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17.$$

если каждая изъ нихъ состоитъ изъ 60 членовъ?

106. Лисица травится борзою собакой. Въ началѣ травли лисица находилась отъ собаки на разстояніи 60 прыжковъ. Лисица дѣлаетъ 9 прыжковъ въ то время, какъ собака дѣлаетъ всего 6 прыжковъ; 3 прыжка собаки составляютъ 7 прыжковъ лисицы. Узнать, сколько прыжковъ сдѣлаетъ собака, пока не догонитъ лисицу.

107. Мнѣ теперь вдвое больше лѣтъ, чѣмъ было вамъ тогда, когда мнѣ было столько, сколько вамъ теперь; а когда вамъ будетъ столько, сколько мнѣ теперь, то намъ будетъ обоимъ вмѣстѣ 63 года. Сколько лѣтъ каждому?

108. Одинъ мальчикъ прожилъ столько будничъ дней, сколько мать его прожила воскресеній; столько сутокъ, сколько отецъ прожилъ недѣль и столько мѣсяцевъ, сколько бабушка его прожила лѣтъ. Всѣмъ имъ безъ мальчика 100 лѣтъ и 4 дня. Сколько лѣтъ мальчику? (1 годъ=365 дней=52 недѣли=12 мѣсяцевъ).

109. Я задумалъ число; приписавъ къ нему справа 8, я прибавилъ къ результату 6; къ полученной суммѣ снова приписалъ справа 9 и прибавилъ 7; затѣмъ справа же приписалъ 4 и все раѳдѣлилъ на 27; тогда я, вычеркнувъ справа послѣднюю цифру, равную задуманному числу, получилъ 13. Какое число я задумалъ?

110. Нѣкто завѣщалъ своимъ сыновьямъ капиталъ такъ, что первый сынъ получилъ тысячу рублей и $^1/_8$ остатка, второй—двѣ тысячи и $^1/_8$ новаго остатка, третій—три тысячи и $^1/_8$ третьяго остатка и т. д. Опредѣлить капиталъ и число сыновей, если извѣстно, что они получили поровну.

111. Двое, имѣя по одинаковому количеству золотыхъ жетоновъ, продали ихъ, при чемъ за каждый получили столько дву-

гривенныхъ, сколько всего было продано жетоновъ. На полученную сумму они купили нѣсколько подстаканниковъ (менѣе 10), заплативъ за каждый по 2 рубля, послѣ чего у нихъ осталось еще нѣкоторое количество денегъ, меньшее цѣны подстаканника. При дѣлежѣ одинъ изъ нихъ получилъ однимъ подстаканникомъ больше другого, въ силу чего онъ, отдавъ другому оставшіяся отъ покупки деньги, доплатилъ еще нѣкоторую сумму. Сколько денегъ было доплачено?

112. Ювелиръ продалъ нѣсколькимъ покупателямъ по четному числу золотыхъ колецъ и взялъ за каждое кольцо столько рублей, сколько колецъ онъ продалъ каждому. Число покупателей равнялось числу рублей, взятыхъ за каждое кольцо. Часть полученной такимъ образомъ суммы ювелиръ издержалъ на покупку десяти браслетовъ, при чемъ за каждый заплатилъ число рублей, меньшее числа браслетовъ, каждый изъ которыхъ стоилъ дороже кольца. (При этомъ оставшаяся у него сумма была меньше цѣны браслета.) Опредѣлить стоимость кольца и браслета.

113. Найти три послѣдовательныхъ ариѳметическихъ нечетныхъ числа, сумма квадратовъ которыхъ равна четырехзначному числу, изображенному одинаковыми цифрами.

114. Найти шесть послѣдовательныхъ положительныхъ четныхъ чиселъ, сумма квадратовъ которыхъ равна четырехзначному числу, изображенному одинаковыми цифрами.

115. Число 294 (75) разложить на четыре части и притомъ такихъ, что если первое число увеличить, второе уменьшить, третье умножить, а четвертое раздѣлить на одно и то же число, то результаты отъ каждаго изъ четырехъ дѣйствій получатся одинаковые.

116. Нѣсколько человѣкъ другъ съ другомъ перездоровались. Всѣхъ рукопожатій оказалось 66. Сколько было человѣкъ?

117. Два купца купили нѣсколько фунтовъ кофе, при чемъ раздѣлили его такъ, что первый получилъ на 1 фунтъ больше другого. Распродавъ кофе, они разсчитали, что если бы первый продавалъ кофе по цѣнѣ второго, а второй — по цѣнѣ перваго, то денегъ у нихъ было бы поровну и что второй купецъ могъ бы продать *весь* кофе за 12 руб. 65 коп. Сколько фунтовъ купилъ каждый и почемъ каждый продавалъ за 1 фунтъ, если

извѣстно, что первый выручилъ на 1 руб. 15 коп. болѣе второго?

118. Я родился 6-го сентября и въ 1892 году праздновалъ свое рожденіе 1-го августа; при этомъ надо замѣтить, что я праздную не годовщину рожденія, а тысячедневіе. Сколько мнѣ лѣтъ?

119. Мнѣ въ 1906 году было столько лѣтъ отроду, сколько единицъ въ числѣ, составленномъ двумя послѣдними цифрами того года, въ которомъ я родился. Сколько мнѣ лѣтъ?

120. У меня есть часы, которые бьютъ часы и получасы. Когда я сталъ переводить ихъ съ одного часа на другой, то насчиталъ 20 ударовъ. Который часъ показывали часы до перевода.

121. Двое часовъ бьютъ въ одно и то же время. Было всего услышано 19 ударовъ. При этомъ извѣстно, что первые часы отстаютъ отъ вторыхъ на 2 секунды; промежутокъ между послѣдовательными ударами первыхъ часовъ равенъ 3 секундамъ, а вторыхъ — 4 секундамъ. Который часъ?

122. За цѣлыя сутки трое стѣнныхъ часовъ опускаются каждые на 312 линій. Заводятся они ежедневно въ 12 часовъ дня. Сколько времени показывали часы, если извѣстно, что они пробили столько разъ, на сколько линій одна гиря была выше другой. Часы бьютъ только часы, но не бьютъ получасовъ.

123. Двое купили у разносчика по одинаковому числу апельсиновъ, трое — по одинаковому числу яблокъ и шестеро, по одинаковому числу грушъ, при чемъ каждый покупавшій платилъ за штуку купленныхъ имъ фруктъ столько копеекъ, сколько штукъ онъ купилъ. Всѣ вмѣстѣ заплатили 1 р. 73 к. Сколько стоитъ десятокъ яблокъ, грушъ и апельсиновъ?

124. Количество мѣди въ слиткѣ составляетъ столько процентовъ количества чистаго золота, сколько единицъ содержится въ нумерѣ пробы этого слитка. Опредѣлить пробу слитка.

125. Пѣшеходъ, идя вдоль линіи трамвая, черезъ каждыя 4 минуты встрѣчаетъ вагонъ трамвая, а черезъ каждыя 12 минутъ его нагоняетъ вагонъ. Зная, что пѣшеходъ и трамвай движутся равномѣрно, опредѣлить, черезъ какіе промежутки времени отходятъ вагоны со станціи.

126. Корабль съ 210 пассажирами имѣлъ совершенно достаточный запасъ прѣсной воды, разсчитанный на все время плаванія. По истеченіи 3 недѣль плаванія стало умирать ежедневно по 3 человѣка. Несмотря на то, что плаваніе продолжалось 9-ю днями болѣе предположеннаго, запасъ воды истощился одновременно съ прибытіемъ корабля къ мѣсту своего назначенія. Предполагая, что ежедневная порція воды, отпускаемая каждому пассажиру, была одна и та же за все время, опредѣлить, сколько дней продолжалось плаваніе.

127. Три лица A, B и C вмѣстѣ со своими женами D, E и F купили по нѣсколько вещей, при чемъ каждый изъ этихъ шести лицъ заплатилъ за свои вещи столько рублей, сколько онъ вещей купилъ. Каждый мужъ заплатилъ противъ своей жены на 63 рубля болѣе. A противъ E купилъ на 23 вещи болѣе, а B противъ D платилъ за каждую вещь 11-ю рублями дороже. Кто на комъ женатъ?

128. Имѣется нѣкоторое количество чистаго золота, вѣсящаго 25 золотниковъ. Отъ этого количества золота было отнято нѣсколько золотниковъ, послѣ чего добавлено къ оставшемуся золоту мѣди такъ, что вѣсъ слитка остался прежнимъ. Затѣмъ снова отъ него было отнято прежнее количество золотниковъ сплава, послѣ чего оказалось, что чистаго золота въ оставшемся слиткѣ стало число процентовъ, равное общему корню неопредѣленнаго ур-ія $5x+4y=576$. Сколько золотниковъ золота было отнято въ первый разъ?

129. Найти y изъ ур-ія:

$$\lg_z \lg_z \lg_z y = 0,$$

зная, что $z=\frac{x}{16}$, гдѣ x есть корень ур-ія:

$$\frac{\sqrt[5]{130+n+x}}{x}+\frac{\sqrt[5]{130+n+x}}{130+n}=\frac{729\sqrt[5]{x}}{13504},$$

при чемъ n есть двузначное число, равное квадрату суммы его цифръ.

130. У трехъ лицъ имѣется нѣкоторая сумма денегъ. Если первый дастъ второму a рублей, то у него будетъ вдвое болѣе второго; если второй дастъ третьему b рублей, то у него будетъ

втрое болѣе, чѣмъ у третьяго; а если третій дастъ первому c рублей, то у него будетъ въ d разъ меньше, чѣмъ у перваго. Сколько денегъ у каждаго, если

a равно 1,7371 части характеристики логариѳма 3146 по основанію 5, дѣленной на логариѳмъ 0,3 по основанію 0,5 (вычислить по таблицамъ);

b равно результату произведенія ряда:

$$2^{\frac{1}{4}} . 4^{\frac{1}{8}} . 8^{\frac{1}{16}} . 16^{\frac{1}{32}} . 32^{\frac{1}{64}}$$

c равно суммѣ корней безъ единицы слѣдующей системы ур-ій:

$$\sqrt[x]{z}\sqrt[y]{z}=\sqrt[3]{z\sqrt[4]{z^3}}; \quad \sqrt[x]{z^3}=\sqrt[y]{z^4},$$

d равно удвоенному числу, выражающему систему счисленія, при которой число 16640 выразится черезъ 40400?

131. Имѣется три сплава. Въ одномъ на a золотниковъ золота приходится b золотниковъ серебра и c золотниковъ мѣди; въ другомъ тѣ же металлы смѣшаны въ отношеніи $m : n : p$, а въ третьемъ — въ отношеніи $q : r : s$. Требуется получить новый сплавъ, въ которомъ было бы d золотниковъ золота, e золотниковъ серебра и f золотниковъ мѣди, и опредѣлить, сколько надо взять отъ каждаго сплава для составленія новаго, если извѣстно, что

a есть большее значеніе второй степени тангенса x, получаемаго изъ ур-ія:

$$sc^2 2x+sc^2 x=12;$$

b — удвоенный меньшій корень (положительный) системы ур-ій:

$$(x+y)(x^3+y^3)=76; \quad (x+y)^3=64(x-y).$$

c — первый членъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи, въ которой всѣ члены положительны, при чемъ сумма первыхъ трехъ членовъ есть 1,39, а логариѳмъ третьяго члена равенъ $2(\lg 3-1)$;

m есть результатъ, получаемый послѣ упрощенія выраженія:

$$2\sqrt{5}+\sqrt{24-8\sqrt{5}};$$

n — $^1/_{18}$ часть числовой величины угла при основаніи равнобедреннаго треугольника, котораго основаніе есть больша часть боковой стороны, дѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи;

p — наименьшее цѣлое значеніе, при которомъ существуютъ неравенства:

$$x \leqslant 9-\left(\frac{x-2}{4}+\frac{2}{3}\right) \quad \text{и} \quad \frac{12x-8}{6}-\frac{18-6x}{3} \geqslant x+2;$$

q — большее значеніе x, удовлетворяющее ур-ію:

$$\operatorname{arc\,sn} x = 2\operatorname{arc\,sn}\frac{x}{\sqrt{2}};$$

r — разстояніе отъ вершины прямого угла до точки пересѣченія двухъ окружностей, построенныхъ на сторонахъ этого угла, какъ на діаметрахъ, если радіусъ одной изъ нихъ есть $1^1/_2$, а другой $\frac{3\sqrt{5}}{5}$;

s есть первая значащая цифра

$$\sqrt[3]{0{,}0054};$$

d равно тому значенію буквы x, при которомъ многочленъ

$$x^4+6x^3+11x^2+3x+31$$

будетъ точнымъ квадратомъ;

e есть $^3/_{20}$ коэффиціента того члена разложенія бинома $\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[7]{x^5}\right)^{10}$ который послѣ упрощенія содержитъ букву x въ первой степени и

f есть произведеніе двухъ безконечныхъ непрерывныхъ дробей:

$$20+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{20}+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{20}+\ldots \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{20}+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{20}+\ldots$$

132. Всякое количество равно своей половинѣ.

Положимъ, что

$$a = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Умноживъ обѣ части на a, получимъ

$$a^2 = ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Вычтя по b^2 изъ обѣихъ частей, имѣемъ:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Разлагаемъ на множителей:

$$(a+b)(a-b) = b(a-b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Дѣля обѣ части на $(a-b)$, имѣемъ

$$a+b = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

а такъ какъ $a=b$, то

$$a+a = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или

$$2a = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

откуда, дѣля обѣ части на 2, получаемъ:

$$a = \frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

133. Два неравныхъ количества равны другъ другу.

Положимъ, что

$$a > b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Для доказательства напищемъ тождество:

$$-ab = -ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или

$$(-a) \cdot b = a(-b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Представимъ себѣ количества $(-a)$ и $(-b)$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} -a = b - a - b = b - (a+b) \\ -b = a - b - a = a - (a+b) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Тогда тождество (3) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$[b-(a+b)]b = [a-(a+b)]a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

или, раскрывъ скобки,

$$b^2 - b(a+b) = a^2 - a(a+b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или

$$b^2 - 2\frac{b(a+b)}{2} = a^2 - 2 \cdot \frac{a(a+b)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ равенства по выраженію $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, будемъ имѣть:

$$b^2-2\frac{b(a+b)}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=a^2-2\frac{a(a+b)}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad . \quad (8)$$

или

$$\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

откуда, зная, что если равны вторыя степени, то равны и первыя, имѣемъ:

$$b-\frac{a+b}{2}=a-\frac{a+b}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

или, сокращая обѣ части на $\frac{a+b}{2}$, получимъ:

$$b=a.$$

134. Сумма какихъ угодно двухъ одинаковыхъ количествъ равна нулю.

Положимъ, что

$$a+a=m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Докажемъ, что m всегда есть нуль. Для этого положимъ, что

$$x=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Умноживъ обѣ части на $-4a$, имѣемъ:

$$-4ax=-4a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

или, перенося въ одну часть,

$$-4ax+4a^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по x^2, тогда:

$$x^2-4ax+4a^2=x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

или

$$(x-2a)^2=x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

откуда

$$x-2a=x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Замѣняя x черезъ равную ему величину a, имѣемъ:

$$a-2a=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или

$$-a=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Перенеся все въ правую часть, имѣемъ окончательно:

$$0=a+a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

135. Всѣ числа равны между собою.

Положимъ, что m не равно n, т.-е.

$$m \neq n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такъ какъ

$$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

то $$(m-n)^2 = (n-m)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$m - n = n - m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$m + m = n + n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

откуда $$2m = 2n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или, дѣля на 2, имѣемъ окончательно:

$$\boldsymbol{m = n.}$$

136. Изъ двухъ величинъ та, которая больше другой, будетъ меньше ея.

Напишемъ слѣдующія равенства:

$$\frac{+a}{-a} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{-a}{+a} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Но такъ какъ -1 всегда равна -1, то

$$\frac{+a}{-a} = \frac{-a}{+a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Вслѣдствіе того, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, заключаемъ, что выраженіе (2) есть пропорція. Но во всякой пропорціи, если предыдущій членъ перваго отношенія больше своего послѣдующаго, то и предыдущій членъ второго отношенія больше своего послѣдующаго, т.-е. если

$$+a > -a \text{ (изъ перваго отношенія),}$$

то и $$-a > +a \text{ (изъ второго отношенія).}$$

137. Всякое число во второй степени есть единица.

Положимъ, что

$$x = y = \frac{m^4}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Вычтя изъ равенства ($x=y$) равенство (2) почленно, имѣемъ:

$$x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ равенства (3) по выраженію:

$$\sqrt{x}-y \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Тогда $$x-\sqrt{x}+\sqrt{x}-y=y-\sqrt{y}+\sqrt{x}-y \quad \ldots\ldots (5)$$

или, сокращая,

$$x-y=\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Но $$x-y=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно

$$(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

или, разлагая на множителей,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots (9)$$

Дѣля обѣ части на

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

имѣемъ: $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Но $$x=y=\frac{m^4}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Слѣдовательно $$\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{\frac{m^4}{4}}=\frac{m^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Далѣе изъ равенства (11) имѣемъ:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}=\frac{2m^2}{2}=m^2=1 \quad \ldots\ldots (13)$$

Слѣдовательно $$m^2=1 \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

138. Всякое положительное число равно отрицательному, съ той же абсолютной величиной.

Изъ алгебры извѣстно, что

$$(\sqrt{-a})^2=-a \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Съ другой стороны

$$(\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a}).(\sqrt{-a})=\sqrt{(-a).(-a)}=\sqrt{+a^2}=+a \quad \ldots (2)$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$-a=+a. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Геометрія.

153. Въ треугольникѣ ABC даны всѣ стороны: $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$. Внутри его найдена такая точка O, изъ которой всѣ три стороны треугольника видны подъ равными углами. Опредѣлить длину прямыхъ: $OA=x$, $OB=y$ и $OC=z$, соединяющихъ точку O съ вершинами треугольника.

154. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ 60°; выразить въ цѣлыхъ числахъ стороны этого треугольника.

155. Выразить стороны треугольника въ цѣлыхъ числахъ такъ, чтобы и площадь его выражалась также цѣлымъ числомъ.

156. Найти прямоугольный треугольникъ, стороны котораго выражаются цѣлыми числами и площадь котораго выражается тѣмъ же числомъ, какъ периметръ.

157. Въ прямоугольномъ треугольникѣ опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу изъ вершины прямого угла. Этотъ перпендикуляръ дѣлитъ большой прямоугольный треугольникъ на два малыхъ, въ которые вписаны окружности, радіусы которыхъ соотвѣтственно равны 4 и 3. Опредѣлить радіусъ окружности, вписанной въ большой треугольникъ.

158. Въ прямоугольный треугольникъ вписана окружность, которая дѣлитъ гипотенузу на части 2 и 3. Опредѣлить площадь треугольника.

159. Изъ точки, лежащей внѣ окружности, проведены къ ней двѣ касательныхъ; длина каждой равна a. Уголъ, составленный этими касательными, раздѣленъ пополамъ, и въ точкѣ пересѣченія биссектрисы съ окружностью проведена къ ней касательная. Опредѣлить периметръ образовавшагося треугольника.

160. Даны на плоскости пять точекъ (произвольно), соединенныхъ между собой черезъ одну. Вычислить сумму угловъ, находящихся при данныхъ точкахъ.

161. Сколько діагоналей можно провести въ n—угольникѣ?

162. Въ саду находятся бесѣдки такъ, что каждая изъ нихъ соединяется дорожками со всѣми остальными. Сколько въ саду бесѣдокъ, если всего дорожекъ 20?

163. Въ какомъ многоугольникѣ число всѣхъ діагоналей въ 7 разъ болѣе числа всѣхъ его сторонъ?

164. Сколько различныхъ треугольныхъ пирамидъ можно образовать по даннымъ шести ребрамъ?

165. Чему равна длина окружности, если площадь круга и радіусъ выражены одинаковымъ количествомъ?

166. Дюжина карандашей перевязана ниткой нѣкоторой длины. Сколько надо имѣть карандашей, чтобы ихъ можно было обвязать ниткой вдвое болѣе прежней?

167. Какъ велика вѣроятность того, что проведенная наудачу хорда въ кругѣ будетъ болѣе стороны правильнаго вписаннаго треугольника?

168. Какъ велика вѣроятность того, что хорда, проведенная наудачу, но параллельно нѣкоторой прямой, больше стороны правильнаго вписаннаго въ кругъ треугольника?

169. Какъ велика вѣроятность того, что хорда, проведенная наудачу изъ данной точки окружности, будетъ больше стороны правильнаго вписаннаго треугольника?

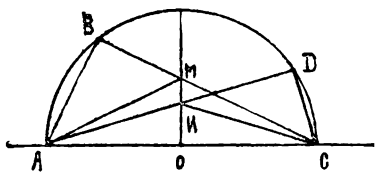
170. На поверхности воды выступаетъ верхняя часть тростника, растущаго въ рѣкѣ. Измѣряя только величины надъ поверхностью воды, опредѣлить глубину рѣки.

171. Четыре одинаковыхъ шара радіуса R помѣщены такъ, что каждый касается трехъ остальныхъ. Опредѣлить радіусъ шара, находящагося между ними и касающагося каждаго изъ данныхъ четырехъ шаровъ.

172. Доска ломбернаго стола, будучи раскрыта, имѣетъ форму квадрата. Опредѣлить на доскѣ мѣсто для винта, около оси котораго должна вращаться крышка, чтобы, будучи сложена или раскрыта, оно принимала положеніе, симметричное относительно ножекъ стола. (Задача столяра.)

173. Въ полуокружности построены два $\triangle\triangle$-ка ABC и ADC; въ первомъ изъ нихъ сторона AB вдвое меньше стороны BC, а во второмъ сторона DC втрое меньше стороны AD. Изъ центра O возставленъ перпендикуляръ къ діаметру AC, пересѣкающій BC и AD въ точкахъ M и N. Точка M соединена прямой съ A, а точка N съ C. Доказать, что треугольники ABM и CDN — подобны.

Черт. 1.



174. Нѣкто предъ смертью выразилъ желаніе, чтобы на его могилѣ была положена мраморная плита, размѣры которой, а также и расположеніе на ней надписей онъ еще при жизни объяснилъ наслѣдникамъ. Въ завѣщаніи своемъ онъ обозначилъ лишь длину плиты, полагая, что ширина ея выяснится сама собой изъ слѣдующихъ его указаній: лицевая сторона плиты должна была быть раздѣлена на 2 части, изъ которыхъ одна площадью въ 25 кв. четвертей предназначалась для надписанія различныхъ изреченій, а другая часть, въ формѣ квадрата — для обозначен я свѣдѣній о личности покойнаго, времени его рожденія и смерти.

Послѣ смерти завѣщателя наслѣдники, обсудивъ вопросъ о постановкѣ плиты, пришли къ заключенію, что изготовленіе ея обойдется имъ слишкомъ дорого. И вотъ тогда одному изъ нихъ пришла мысль, что можно замѣнить столь дорого стоящую плиту другой, вчетверо меньшею по размѣрамъ и по цѣнѣ, не нарушая при этомъ указанныхъ въ завѣщаніи условій и цифровыхъ данныхъ, вслѣдствіе чего и рѣшено было заказать плиту предложенныхъ размѣровъ. Спрашивается, какого размѣра плита была предложена завѣщателемъ и какого размѣра устроили ее наслѣдники, при чемъ въ обоихъ случаяхъ указать ея длину и ширину.

175. Вообразимъ себѣ земной шаръ обтянутымъ по экватору веревкой; удлинимъ эту веревку на какую-нибудь линейную единицу и, сдѣлавъ изъ этой веревки твердое кольцо, расположимъ его концентрически съ экваторомъ; тогда между эквато-

ромъ и кольцомъ будетъ нѣкоторое опредѣленное разстояніе. Сдѣлаемъ то же съ шаромъ, величиной съ апельсинъ, т.-е. обтянемъ его веревкой по окружности большого круга и, затѣмъ, удлинивъ на ту же единицу, сдѣлаемъ твердое кольцо, расположивъ его концентрически. Опредѣлить, въ которомъ изъ этихъ случаевъ веревка будетъ дальше отстоять отъ поверхности шара.

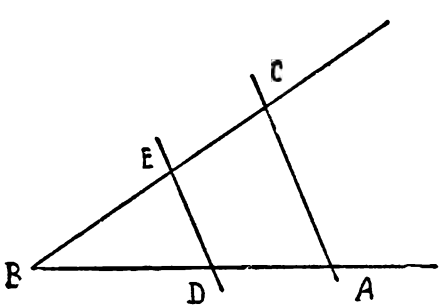
176. Вообразивъ рядъ концентрическихъ окружностей, длины которыхъ послѣдовательно возрастаютъ на единицу, написать рядъ, изображающій послѣдовательное приращеніе радіусовъ.

177. Данъ матеріальный шаръ. Опредѣлить его діаметръ, пользуясь только линейкой и циркулемъ.

178. Какого вида должно быть тѣло, чтобы оно могло закрывать собою плотно и проходить чрезъ три отверстія: круглое, квадратное и въ видѣ равнобедреннаго треугольника? Высота треугольника, сторона квадрата и діаметръ круга равны между собою.

179. Отрѣзки двухъ параллельныхъ прямыхъ, заключенные между сторонами даннаго угла, равны между собой.

Черт. 2.



Пересѣчемъ параллельными прямыми AC и DE стороны угла ABC и докажемъ, что

$$AC=DE.$$

Такъ какъ параллельныя линіи отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части, то

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или, взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, имѣемъ:

$$AB\,.\,BE=BD\,.\,BC \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Умноживъ обѣ части равенства (2) на выраженіе: $(AC-DE)$, имѣемъ:

$$AB\,.\,BE(AC-DE)=BD\,.\,BC\,.(AC-DE). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$AB\,.\,BE\,.\,AC-AB\,.\,BE\,.\,DE=BD\,.\,BC\,.\,AC-BD\,.\,BC\,.\,DE \quad (4)$$

или, перенося членъ $AB\,.\,BE\,.\,DE$ въ правую, а членъ $BD\,.\,BC\,.\,AC$ въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$AB\,.\,BE\,.\,AC-BD\,.\,BC\,.\,AC=AB\,.\,BE\,.\,DE-BD\,.\,BC\,.\,DE \quad (5)$$

или, вынося общіе множители за скобку, будемъ имѣть:

$$AC(AB\,.\,BE-BD\,.\,BC)=DE(AB\,.\,BE-BD\,.\,BC) \quad . \quad (6)$$

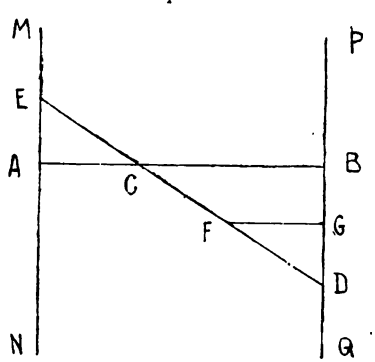
Дѣля обѣ части на множитель $(AB\,.\,BE-BD\,.\,BC)$, имѣемъ окончательно:

$$AC=DE \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

180. Прямая равна своему отрѣзку.

Возьмемъ прямую AB и докажемъ, что $AB=AC$.

Черт. 3.



Проведя прямыя MN и PQ перпендикулярно къ линіи AB и сѣкущую ED, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ C, найдемъ, что треугольники CBD и ACE подобны, такъ какъ углы равны.

Вслѣдствіе этого

$$\frac{BD}{AE}=\frac{CB}{AC}=\frac{AB-AC}{AC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Проведя FG параллельно AB, изъ подобныхъ треугольниковъ FGD и CBD имѣемъ:

$$\frac{BD}{GD}=\frac{BC}{FG}=\frac{AB-AC}{FG} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Опредѣляя изъ обѣихъ пропорцій BD, имѣемъ:

$$BD=\frac{AE(AB-AC)}{AC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и

$$BD=\frac{GD(AB-AC)}{FG} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно:

$$\frac{AE(AB-AC)}{AC}=\frac{GD(AB-AC)}{FG} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Умножая обѣ части равенства (5) на произведеніе $(AC\,.\,FG)$, имѣемъ:

$$AE\,.\,FG(AB-AC)=AC\,.\,GD(AB-AC) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$AE\,.\,GF\,.\,AB-AE\,.\,FG\,.\,AC=AC\,.\,GD\,.\,AB-AC^2GD \quad (7)$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по выраженію: $(AE\,.\,GF\,.\,AC-DG\,.\,AB\,.\,AC)$ и производя сокращенія, имѣемъ:

$$AE\,.\,FG\,.\,AB-DG\,.\,AB\,.\,AC=AE\,.\,GF\,.\,AC-AC^2GD \quad (8)$$

или, вынося общихъ множителей за скобку, получаемъ:

$$AB(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC)=AC(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC) \quad . \quad (9)$$

Дѣля на стоящее въ скобкахъ выраженіе обѣ части, имѣемъ окончательно:

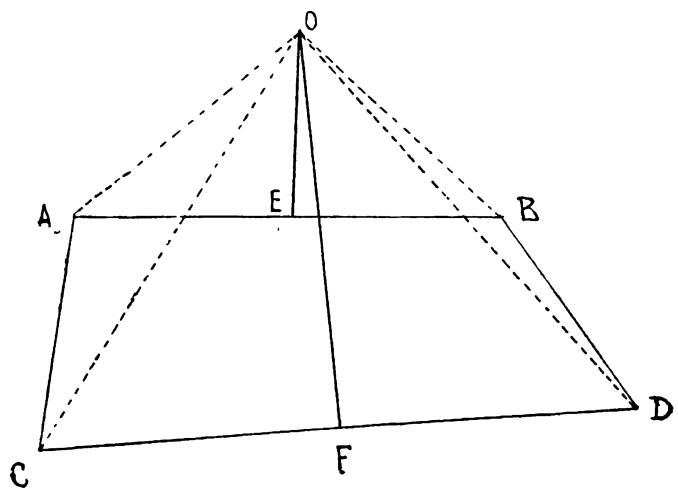
$$AB=AC. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

181. Если три стороны одного треугольника соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого треугольника, то такіе треугольники могутъ имѣть неравные углы.

Для доказательства возьмемъ какую-нибудь линію AB и при точкѣ A строимъ произвольный уголъ BAC, отложивъ на другой сторонѣ этого угла отрѣзокъ AC. При точкѣ B строимъ уголъ ABD, большій угла BAC, и откладывая по сторонѣ BD отрѣзокъ BD, равный AC, соединяемъ точки C и D. Раздѣливъ AB и CD пополамъ въ точкахъ E и F, возставимъ къ нимъ перпендикуляры OE и OF, которые пересѣкутся въ точкѣ O. Соединяя затѣмъ точку O съ вершинами A, B, C и D и замѣтивъ, что $AC=BD$ (по построенію), $AO=OB$, какъ наклонныя, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра OE, и $OC=OD$, какъ наклонныя, равноудаленныя отъ основанія перпендику-

ляра OF, находимъ, что въ треугольникахъ AOC и BOD всѣ три стороны одного соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого. Но такъ какъ $\angle EAO = \angle EBO$ (изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ AEO и BEO), а $\angle DBE > \angle CAE$ (по построенію), то, сложивъ эти два неравенства, находимъ:

Черт. 4.



$$\angle DBE + EBO > \angle CAE + \angle EAO \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$\angle DBO > \angle CAO \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

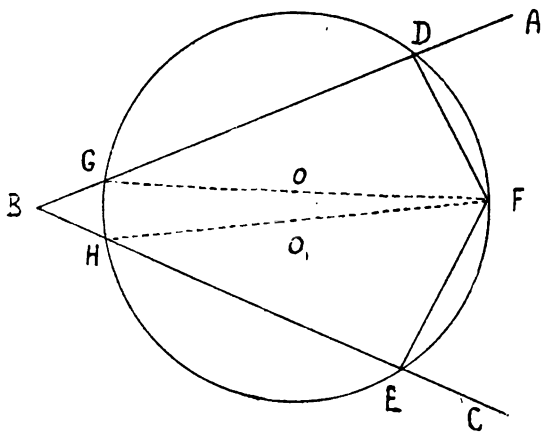
т.-е. въ треугольникахъ, у которыхъ по три стороны равны, углы не равны.

182. Всякая окружность имѣетъ два центра.

Возьмемъ произвольный уголъ ABC и въ произвольно взятыхъ точкахъ D и E построимъ прямые углы GDF и HEF. Далѣе проведемъ окружность черезъ три точки, т.-е. черезъ точки D, E и F, и положимъ, что она пересѣчетъ данный уголъ въ точкахъ G и H. Соединяя точки G и H съ точкою F и замѣчая, что углы GDF и HEF прямые, заключаемъ, что линіи GF и HC должны быть діаметрами данной окружности, потому что на нихъ опираются прямые углы, измѣряемые полуокружностью. Но, какъ извѣстно, центръ окружности лежитъ на

срединѣ діаметра, слѣдовательно онъ долженъ лежать и въ точкѣ O и въ точкѣ O_1. Откуда заключаемъ, что данная окружность имѣетъ два центра.

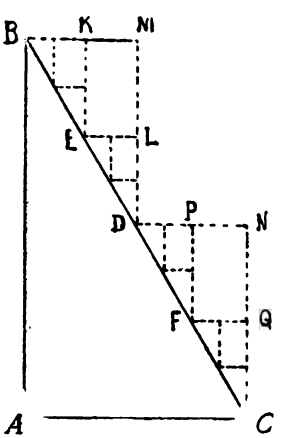
Черт. 5.



183. Сумма катетовъ равна гипотенузѣ.

Въ данномъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC раздѣлимъ гипотенузу BC пополамъ въ точкѣ D и проведемъ линіи BM и DN параллельно катету AC и линіи CN и DM параллельно катету AB. Тогда

Черт. 6.



$$\left.\begin{aligned} BM+DN&=AC\\ \text{и}\quad CN+DM&=AB\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

Далѣе раздѣлимъ BD и DC пополамъ и сдѣлаемъ то же построеніе, тогда

$$\left.\begin{aligned} BK+EL+DP+FQ&=AC\\ \text{и}\quad CQ+FP+DL+EK&=AB\end{aligned}\right\}\ \ldots(2)$$

или, складывая равенства (2) почленно, имѣемъ:

$$BK+EL+DF+FQ+CQ+FP+DL+EK=AC+AB\ \ldots(2)$$

или

$$BK+KE+EL+LD+DF+PF+FQ+QC=AC+AB\ \ldots(4)$$

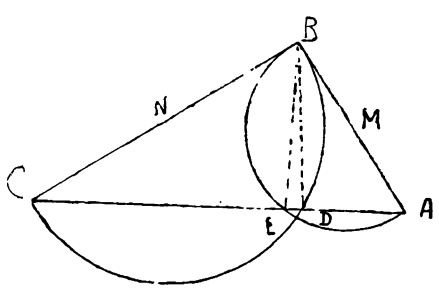
Увеличивая такимъ образомъ число дѣленій гипотенузы BC, мы каждый разъ будемъ получать ломаную линію все съ большимъ и большимъ числомъ зубцовъ, которые будутъ все меньше и меньше. При этомъ, какъ бы мелко мы ни дѣлили гипотенузу, сумма всѣхъ прямыхъ, образующихъ ломаную линію, будетъ всегда равна суммѣ катетовъ. Когда число дѣленій гипотенузы будетъ безконечно велико, то ломаная линія утратитъ свою зубчатую форму и будетъ сливаться съ гипотенузой и въ предѣлѣ обратится въ прямую линію, равную гипотенузѣ, а такъ какъ сумма прямыхъ отрѣзковъ ломаной линіи будетъ величина постоянная и всегда равна $(AB+AC)$, то равенство (4) сохранится и тогда, когда число дѣленій гипотенузы будетъ безконечно велико.

Слѣдовательно предѣлъ суммы отрѣзковъ прямыхъ, составляющихъ ломаную линію, будетъ равенъ суммѣ катетовъ, а такъ какъ эта ломаная линія въ предѣлѣ будетъ равна гипотенузѣ BC, то

$$AB+AC=BC. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

184. Изъ точки на прямую можно опустить два перпендикуляра.

Черт. 7.

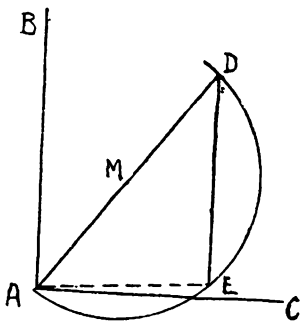


Возьмемъ треугольникъ ABC и стороны AB и BC въ точкахъ M и N раздѣлимъ пополамъ и опишемъ на нихъ, какъ на діаметрахъ, окружности, которыя пересѣкутъ сторону AC въ точкахъ D и E. Уголъ AEB, какъ опирающійся на діаметръ AB, будетъ прямой, а уголъ BDC, какъ опирающійся на діаметръ BC, также прямой.

Изъ этого слѣдуетъ что линіи BD и BE, исходящія изъ одной точки B, будутъ перпендикулярны къ сторонѣ AC, слѣдовательно изъ точки B на линію AC можно опустить два перпендикуляра.

185. Изъ точки, взятой на прямой, можно возставить къ этой прямой два перпендикуляра.

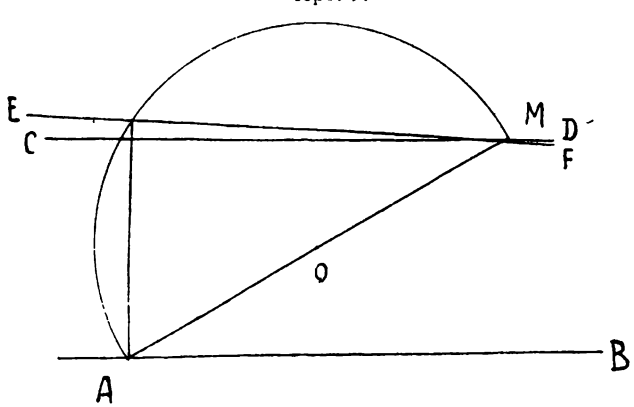
Черт. 8.



Для доказательства возьмемъ прямой уголъ BAC и въ немъ проведемъ линію AD черезъ вершину A прямого угла BAC; отложивъ какое-нибудь разстояніе AD и раздѣливъ его въ точкѣ M пополамъ, опишемъ на AD, какъ на діаметрѣ, окружность. Далѣе изъ точки D проведемъ линію DE параллельно AB до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ E. Соединивъ A съ E, найдемъ, что $\angle AED$ будетъ прямой; а такъ какъ AB параллельно DE, то уголъ EAB также прямой; но уголъ CAB прямой по условію, слѣдовательно, какъ линія AC, такъ и линія AE будутъ перпендикулярны къ линіи AB, т.-е. изъ точки A къ линіи AB могутъ быть возставлены два перпендикуляра.

186. Черезъ точку, находящуюся внѣ прямой, можно провести къ ней двѣ параллельныя прямыя.

Черт. 9.

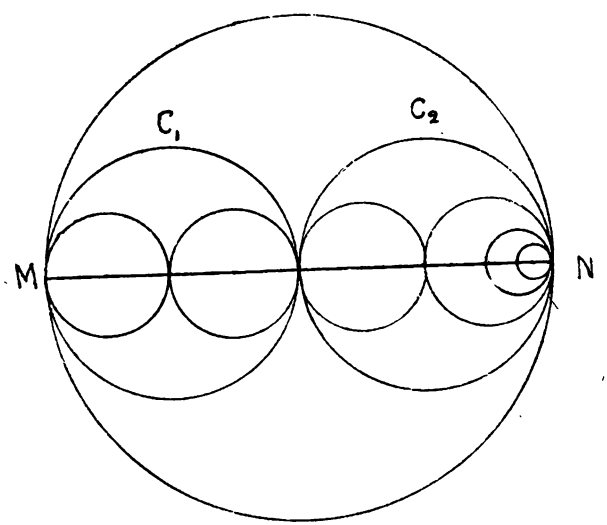


Изъ данной точки M проведемъ линію CD параллельно данной прямой AB. Проведя затѣмъ какую-нибудь сѣкущую AM, опишемъ на ней, какъ на діаметрѣ, окружность. Возставивъ

далѣе изъ точки A перпендикуляръ AE къ прямой AB, соединимъ точку (E) встрѣчи его съ окружностью съ точкою N. Тогда $\angle AEM$, какъ опирающійся на діаметръ AM, будетъ прямой, а такъ какъ $\angle BAE$ также прямой, то заключаемъ, что и линія EF, проходящая черезъ точку M, также какъ и линія CD, будетъ параллельна линіи AB. Изъ этого слѣдуетъ, что черезъ точку M проходятъ двѣ линіи CD и EF, параллельныя линіи AB.

187. Длина всякой окружности равна своему діаметру.

Черт. 10.



Опишемъ на линіи MN, какъ на діаметрѣ, окружность, радіусъ которой обозначимъ черезъ R. Тогда длина окружности будетъ равна $2\pi R$, т.-е.

$$C=2\pi R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Дѣля MO и NO пополамъ въ точкахъ O_1 и O_2, опишемъ новыя окружности, радіусами MO_1 и NO_2, каждый изъ которыхъ равенъ $\frac{R}{2}$. Длина каждой новой окружности будетъ:

$$C_1=C_2=2\pi\frac{R}{2}=\pi R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

а сумма ихъ длинъ будетъ:

$$C_1+C_2=\pi R+\pi R=2\pi R \ldots\ldots\ldots (3)$$

т.-е. равна длинѣ большой окружности C.

Дѣля подобнымъ же образомъ далѣе, находимъ, что сумма длинъ новыхъ окружностей C_3, C_4, C_5 и C_6 будетъ:

$$C_3+C_4+C_5+C_6=2\pi\frac{R}{4}+2\pi\frac{R}{4}+2\pi\frac{R}{4}+2\pi\frac{R}{4}=$$

$$=\left(2\pi\frac{R}{4}\right).4=8\pi\frac{R}{4}=2\pi R \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Продолжая такое дѣленіе далѣе, мы будемъ дѣлить діаметръ MN на части все меньшія и меньшія, радіусы новыхъ окружностей будутъ послѣдовательно $\frac{R}{8}$, $\frac{R}{16}$, $\frac{R}{32}$ и т. д., при этомъ сумма длинъ всѣхъ этихъ окружностей всегда равна $2\pi R$.

Коль скоро число дѣленій большого діаметра будетъ безконечно большимъ, окружности будутъ настолько малы, что сольются съ діаметромъ, и длина ихъ въ предѣлѣ выразится длиной діаметра, такъ что она будетъ равна $2R$. Съ другой стороны, сумма длинъ этихъ окружностей постоянна и равна $2\pi R$, слѣдовательно

$$C=2\pi R=2R \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Изъ равенства (4) слѣдуетъ:

$$2\pi R=2R \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

или, дѣля на $2R$,

$$\pi=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

т.-е величина π равна не 3,141592..., а единицѣ.

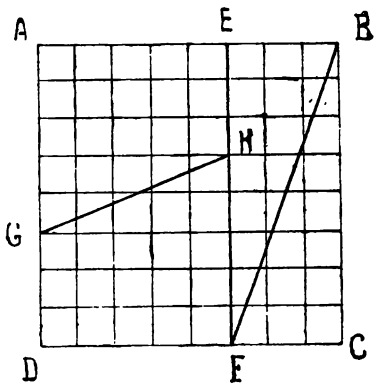
188. Площадь квадрата, сторона котораго равна 8 линейнымъ единицамъ, будетъ имѣть не 64, а 65 квадр. единицъ.

Вообразимъ себѣ квадратъ $ABCD$, сторона котораго имѣетъ 8 линейныхъ единицъ. Раздѣлимъ площадь этого квадрата линіей EF такъ, чтобы образовавшіяся части $AEFD$ и $EBCF$ относились какъ 3 : 5, т.-е.

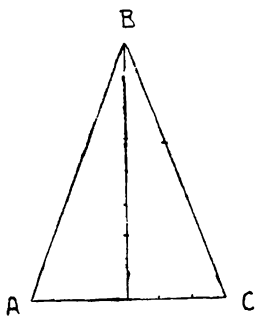
$$AEFD : EBCF=5:3 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Прямоугольникъ *EBCF* линіей *BF* дѣлимъ на два равныхъ прямоугольныхъ треугольника *EBF* и *BCF* и приложимъ ихъ другъ къ другу такъ, чтобы стороны *BC* и *EF* совпали и вершина *F* совпала бы съ вершиной *B*; тогда точки *E* и *C* сольются,

Черт. 11.

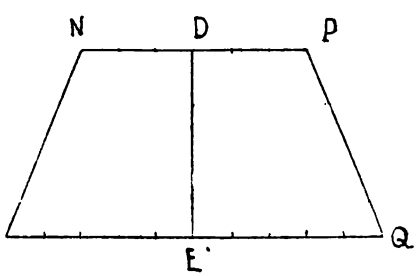


Черт. 12.



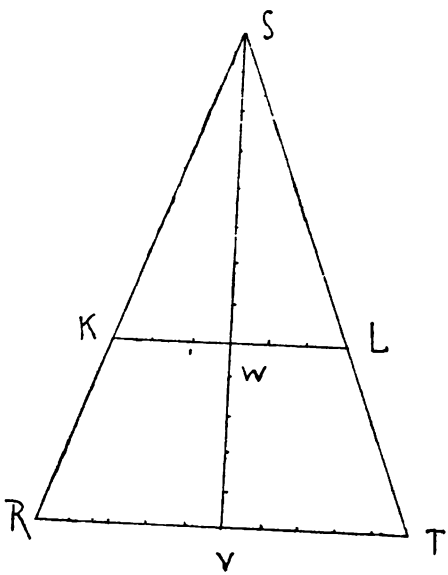
а *EB* и *FC* будутъ образовать прямую линію, и у насъ получится равнобедренный треугольникъ *A'B'C'* (см. черт. 12), основаніе котораго равно 6 линейнымъ единицамъ, а высота—8. Далѣе прямоугольникъ *AEFD* дѣлимъ пополамъ линіей *GH*, проведенной отъ конца 3-го дѣленія лѣвой стороны квадрата *AD*, считая отъ основанія, до 5-го дѣленія на сторонѣ *EF*, считая отъ основанія. Приложивъ полученныя такимъ образомъ трапеціи *AEHG* и *DFHG* такъ, чтобы линіи *AE* и *DF* совпали и чтобы *EH* и *HF* составили одну прямую линію, мы получимъ равнобокую трапецію *MNPQ* (см. черт. 13), при чемъ основаніе *MQ* будетъ имѣть 10 линейныхъ единицъ, основаніе *NP*—6 линейныхъ единицъ, а высота *D'E'*—5 такихъ же единицъ.

Черт. 13.



Приложимъ теперь треугольникъ $A_1B_1C_1$ съ основаніемъ, равнымъ 6 единицамъ, къ сторонѣ NP трапеціи $MNPQ$, которая будетъ имѣть также 6 единицъ, такъ, чтобы $A'C'$ и NP совпали; тогда у насъ образуется треугольникъ RST (см. черт. 14), основаніе котораго RT равно 10, а высота SV — 13 линейнымъ единицамъ, при этомъ $A'C'$ и NP сольются въ прямую KL. Площадь этого треугольника должна быть равновелика площади даннаго квадрата $ABCD$, такъ какъ этотъ треугольникъ получился изъ частей даннаго квадрата. Но площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту, т.-е.

Черт. 14.



$$\frac{10 \cdot 13}{2} = \frac{130}{2} = 65 \text{ кв. ед.}$$

А такъ какъ площадь квадрата $ABCD$ равновелика площади треугольника, то площадь квадрата будетъ равняться 65 квадратнымъ единицамъ.

189. Периметръ параллелограмма (или квадрата, ромба) равенъ его сторонѣ.

Данъ параллелограммъ $ABCD$; докажемъ, что его периметръ равенъ его сторонѣ AB.

Раздѣлимъ AB на нѣкоторое число равныхъ частей; на столько же частей раздѣлимъ и сторону DC. Изъ каждой точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельныя соотвѣтственнымъ сторонамъ параллелограмма. Положимъ, что мы раздѣлили и AD и DC на 4 равныя части, тогда

$$AE = MN = ND = CR = ST = BT = HL = GK = FG. \quad . \quad . \quad (1)$$

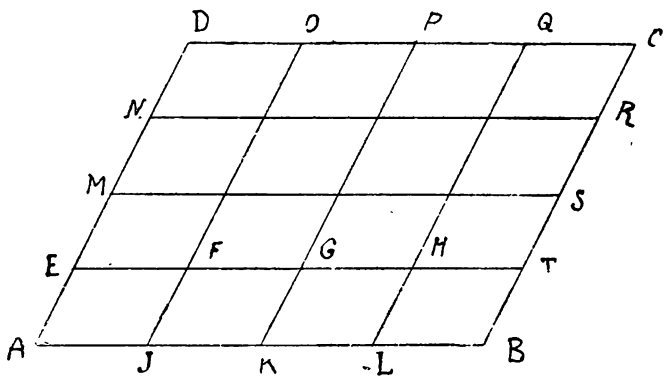
а съ другой стороны

$$DO=OP=PQ=QC=LB=LK=KJ=AJ=EF=FG=GH=HT \quad (2),$$

какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными.

Вслѣдствіе этого нетрудно видѣть, что периметръ $ADCB$ можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Черт. 15.



$$\square ABCD=AD+DC+CD+AB=2AD+2DC \ldots (3)$$

а такъ какъ

$$AD=4AE \quad \text{и} \quad BC=4AJ. \ldots\ldots\ldots (4)$$

то

$$\text{перим. } ABCD=2(4AE)+2(4AJ)=8AE+8AJ= \\ =4(2AE)+4(2AJ). \ldots\ldots\ldots (5)$$

или

$$\text{перим. } ABCD=4(2AE+2AJ) \ldots\ldots (6)$$

Но $(2AE+2AJ)$ есть периметръ или малаго параллелограмма $AEFJ$, или $JFGK$, или $KGHL$, или $LHTB$.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{пер. } ABCD=4(2AE+2AJ)=\text{пер. } AEFJ+\text{пер. } JFGK+ \\ +\text{пер. } KGHL+\text{пер. } LHTB. \ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ дѣлить AB и AD мы можемъ неограниченно, то можно взять эти части настолько малыми, что рядъ параллело-

граммовъ $AEFG$ и т. д. ничѣмъ не будетъ отличаться отъ прямой AB; тогда очевидно, что сумма периметровъ этихъ малыхъ параллелограммовъ будетъ равна прямой AB, слѣдовательно

$$\text{перим. } ABCD = AB.$$

Такимъ же образомъ нетрудно доказать, что периметръ треугольника равенъ одной изъ его сторонъ.

Тригонометрія.

190. Рѣшить систему ур-ій:

$$\lg_{\operatorname{tg} y} \operatorname{tg} x - \lg_{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} y = \frac{8}{3}$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 16.$$

191. Рѣшить ур-іе:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x).$$

192. Какая зависимость должна быть между количествами m и n, чтобы могли существовать совмѣстно ур-ія:

$$\operatorname{sn} x + \operatorname{cs} x = m$$
$$\operatorname{sn}^3 x + \operatorname{cs}^3 x = n.$$

193. Упростить многочленъ:

$$\operatorname{cs} 5\alpha + 3\operatorname{cs} 7\alpha + 3\operatorname{cs} 9\alpha + \operatorname{cs} 11\alpha.$$

194. Привести къ логариѳмическому виду выраженіе:

$$\frac{1 + \operatorname{cs} x + \operatorname{cs} 2x + \operatorname{cs} 3x}{2\operatorname{cs}^2 x + \operatorname{cs} x - 1}.$$

195. Опредѣлить углы косоугольнаго треугольника, если они связаны слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c.$$

196. Что больше: $\operatorname{sn} 2\alpha$ или $2\operatorname{sn}\alpha$?

197. Найти предѣлъ выраженія:

$$\frac{a\pi}{b} \operatorname{sn}\left(\frac{a-x}{b}\right) \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}, \text{ при } x \text{ равномъ } a.$$

198. Опредѣлить x изъ ур-ія:

$$\operatorname{arc\,sn} x+\operatorname{arc\,sn}\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}.$$

199. Чему равенъ:

$$\operatorname{sn}[\operatorname{arc\,sn} x+\operatorname{arc\,cs} x]?$$

200. Въ какой четверти сумма синуса и косинуса одного и того же угла больше единицы?

201. Кубъ пересѣченъ плоскостью такъ, что въ сѣченіи получился правильный шестиугольникъ. Опредѣлить двугранный уголъ плоскости съ основаніемъ куба.

202. Опредѣлить центральный уголъ въ осевомъ сѣченіи сферическаго сектора, если его сферическая поверхность равновелика конической.

203. n прямыхъ линій, пересѣкаясь въ одной точкѣ, образуютъ равные углы. Изъ точки, отстоящей отъ точки пересѣченія линій на разстояніи a и взятой на одной изъ данныхъ линій, опущенъ перпендикуляръ на слѣдующую прямую; изъ конца этого перпендикуляра опущенъ перпендикуляръ на слѣдующую прямую и т. д. Опредѣлить длину ломаной линіи, образованной этими перпендикулярами.

204. Синусы однихъ и тѣхъ же угловъ не равны.

Изъ тригонометріи извѣстно, что при $\alpha<\frac{\pi}{2}$ величина $\operatorname{sn}\alpha$ будетъ больше нуля; а $\operatorname{sn}(\pi+\alpha)$ меньше нуля и $\operatorname{cs}\alpha$ больше нуля, а $\operatorname{cs}(\pi+\alpha)$ меньше нуля, т.-е.

$$\left.\begin{array}{ll}\operatorname{sn}\alpha>0 & \operatorname{sn}(\pi+\alpha)<0\\ \operatorname{cs}\alpha>0 & \operatorname{cs}(\pi+\alpha)<0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или, такъ какъ положительная величина всегда больше отрицательной, то

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sn}\alpha>\operatorname{sn}(\pi+\alpha)\\ \operatorname{cs}\alpha>\operatorname{cs}(\pi+\alpha)\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Перемножая два неравенства одинаковаго смысла, мы получаемъ неравенство того же смысла, слѣдовательно:

$$\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha>\operatorname{sn}(\pi+\alpha)\operatorname{cs}(\pi+\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

или, умножая обѣ части на 2, имѣемъ:

$$2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha>2\operatorname{sn}(\pi+\alpha)\operatorname{cs}(\pi+\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Замѣняя въ полученномъ неравенствѣ $2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha$ черезъ $\operatorname{sn}2\alpha$ и $2\operatorname{sn}(\pi+\alpha)\operatorname{cs}(\pi+\alpha)$ черезъ $\operatorname{sn}2(\pi+\alpha)$, имѣемъ:

$$\operatorname{sn}2\alpha>\operatorname{sn}2(\pi+\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

но $$\operatorname{sn}2(\pi+\alpha)=\operatorname{sn}(2\pi+2\alpha)=\operatorname{sn}2\alpha. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Слѣдовательно $$\operatorname{sn}2\alpha>\operatorname{sn}2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

205. Дуга въ 45° равна нулю.

Извѣстно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1 \text{ и } \operatorname{sn}\frac{\pi}{4}=\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1 \text{ и } \operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Складывая оба выраженія, имѣемъ:

$$1+\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Замѣняя $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ черезъ синусъ и косинусъ, получимъ:

$$1+\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}=\frac{\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

или, освобождаясь отъ знаменателя:

$$\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}+\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}^2\frac{\pi}{4}=\operatorname{sn}\frac{\pi}{4} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

или $$\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}^2\frac{\pi}{4}=\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

или $$\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Дѣля на $\operatorname{sn}\frac{\pi}{4}-\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}$ обѣ части, имѣемъ:

$$\operatorname{cs}\frac{\pi}{4}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{\pi}{4}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

206. $\frac{1}{4}>\frac{1}{9}$.

Безусловно, что

$$\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}=\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Откуда $$\lg\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}=\lg\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

но $$2\lg\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}>\lg\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$\lg\operatorname{sn}^2\frac{\pi}{6}>\lg\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ:

$$\operatorname{sn}^2\frac{\pi}{6}>\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

потому что большему логариѳму соотвѣтствуетъ и большее число.

$$\operatorname{sn}^2\frac{\pi}{6}=\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

а $$\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Слѣдовательно неравенство (6) даетъ:

$$\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}\operatorname{sn}\frac{\pi}{6}>\operatorname{sn}\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

или $$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}>\tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

т.-е. $$\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

207. Формула косинуса двойного угла вѣрна не для всякаго угла.

Рѣшая какую-либо тригонометрическую формулу, вѣрную для любого угла, напр. $\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{cs}^2\alpha=1$ или $\operatorname{sn}2\alpha=2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha$ и т. д.

мы получаемъ тождество, которое и указываетъ на справедливость данной формулы.

Возьмемъ формулу

$$\text{cs}\,2\alpha=\text{cs}^2\alpha-\text{sn}^2\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Преобразуемъ ее слѣдующимъ образомъ:

$$\text{cs}\,2\alpha=\text{cs}^2\alpha-\text{sn}^2\alpha=-(\text{sn}^2\alpha-\text{cs}^2\alpha)=-(\text{sn}^2\alpha-\text{cs}\,\alpha\,.\,\text{cs}\,\alpha). \quad (2)$$

но $$-(\text{sn}^2\alpha-\text{cs}\,\alpha\,.\,\text{cs}\,\alpha)=-[\text{sn}^2\alpha+\text{cs}\,\alpha\,.\,(-\text{cs}\,\alpha)] \quad \ldots \quad (3)$$

но $$-\text{cs}\,\alpha=\text{cs}\,(-\alpha)=\text{cs}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно:

$$\text{cs}\,2\alpha=-[\text{sn}^2\alpha+\text{cs}\,\alpha\,\text{cs}(-\alpha)]=-[\text{sn}^2\alpha+\text{cs}\,\alpha\,\text{cs}\,\alpha]=$$

$$=-[\text{sn}^2\alpha+\text{cs}^2\alpha] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

но $$\text{sn}^2\alpha+\text{cs}^2\alpha=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Слѣдовательно: $$\text{cs}\,2\alpha=-1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

но $$-1=\text{cs}\,180^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Поэтому $$\text{cs}\,2\alpha=\text{cs}\,180^\circ. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Откуда: $$2\alpha=180^\circ. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

или $$\alpha=90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Итакъ, формула

$$\text{cs}\,2\alpha=\text{cs}^2\alpha-\text{sn}^2\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

вѣрна только для $\alpha=90^\circ$, или, если напишемъ этотъ уголъ въ общемъ видѣ, то формула будетъ вѣрна для угловъ:

$$\alpha=2k\pi+90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Физика.

208. Опредѣлить давленіе жидкости въ ведрѣ на его дно при наклонномъ положеніи ведра, принимая во вниманіе, что все дно ведра должно быть покрыто водою и что площадь основанія ведра равна S, высота жидкости при горизонтальномъ положеніи основанія равна H и плотность жидкости равна d. (Уголъ наклона равенъ α.)

209. По свидѣтельству Витрувія, корона сиракузскаго царя Гіерона, состоявшая изъ сплава золота и серебра, вѣсила 10 килограммовъ. Вѣсъ короны въ водѣ былъ равенъ 93,55% вѣса ея въ воздухѣ. Зная, что удѣльный вѣсъ золота равенъ 19,25 и удѣльный вѣсъ серебра равенъ 10,5 — опредѣлить количество каждаго изъ этихъ металловъ, входившихъ въ составъ короны.

210. Въ оптическомъ магазинѣ выставлено 20 термометровъ, изъ которыхъ 10 термометровъ Реомюра, а остальные Цельсія и Фаренгейта. Опредѣлить температуру въ магазинѣ по Реомюру. если извѣстно, что сумма градусовъ, показываемыхъ всѣми термометрами, равна 453°, а температура въ магазинѣ по Реомюру была вдвое больше числа термометровъ Цельсія.

211. Опредѣлить температуру, при которой термометры Реомюра и Фаренгейта показываютъ одно и то же число градусовъ.

212. Торговецъ долженъ былъ отвѣсить двумъ своимъ покупателямъ по одинаковому числу фунтовъ товару, но его вѣсы были невѣрны — одно плечо коромысла было короче другого. Для перваго покупателя онъ положилъ грузъ на короткое плечо, а товаръ — на длинное, а другому наоборотъ. Выигралъ или потерялъ торговецъ при такомъ взвѣшиваніи товара?

213. Тѣло, положенное на одну чашку вѣсовъ, уравновѣшивается грузомъ въ 16 фунтовъ; то же тѣло, положенное на дру-

гую чашку, уравновѣшивается грузомъ въ 9 фунтовъ. Опредѣлить вѣсъ тѣла.

214. Сила свѣта лампы относится къ силѣ свѣта свѣчи, какъ 400 : 81. Эти два источника свѣта находятся въ разстояніи 31,9 аршина другъ отъ друга. Въ какой точкѣ прямой, соединяющей ихъ, освѣщеніе тѣмъ и другимъ источникомъ будетъ одинаково?

215. Имѣется два одинаковаго вида бруска, изъ которыхъ одинъ представляетъ изъ себя магнитъ, а другой — желѣзо. Какимъ образомъ, не прибѣгая ни къ какимъ приборамъ, можно опредѣлить, какой изъ нихъ магнитъ и какой желѣзо?

216*). Представимъ себѣ земной шаръ пустымъ внутри и положимъ, что на нѣкоторомъ разстояніи отъ центра въ этомъ пустомъ пространствѣ находится тѣло. Опредѣлить, какое оно приметъ положеніе при равновѣсіи.

217. Представимъ себѣ земной шаръ просверленнымъ по оси, перпендикулярной къ плоскости эклиптики. Пусть мы имѣемъ матеріальное тѣло, масса котораго M, подверженное только дѣйствію силы тяжести. Это тѣло мы заставимъ падать въ просверленное отверстіе. Что произойдетъ съ тѣломъ?

218. На плоское зеркало изъ источника свѣта S падаетъ лучъ, который образуетъ съ отраженнымъ лучемъ уголъ B. Далѣе зеркало повернуто на уголъ α такъ, что отраженный лучъ съ падающимъ остались въ прежней плоскости. Опредѣлить уголъ между новымъ положеніемъ лучей.

219. Можно ли сифономъ переливать жидкость въ пустотѣ?

220. Можно ли всасывающимъ насосомъ поднять кипящую воду?

221. Можно ли намагнитить сталь токами отъ катушки Румкорфа?

222. Въ сосудъ, наполненный доверху водой, опущено тѣло вѣса P; при этомъ изъ сосуда выливается m граммовъ воды. На сколько измѣнилось давленіе жидкости на дно сосуда?

---

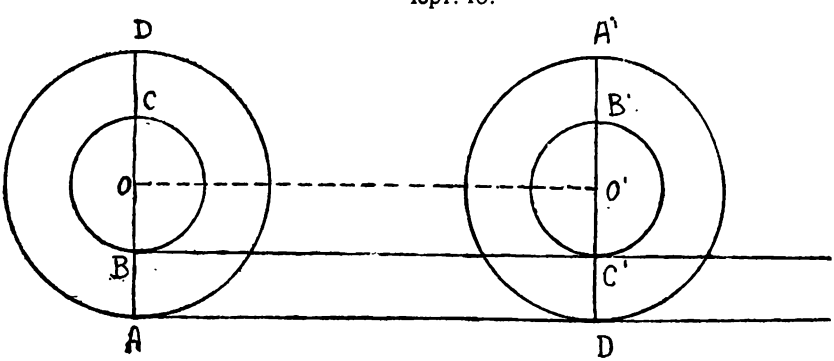
*) Всѣ нижеприводимыя задачи, а также и № 215 предлагается рѣшить устно.

223. Какой возъ легче опрокинуть — съ соломой или кирпичемъ, при равномъ вѣсѣ и одинаковомъ устройствѣ телѣгъ?

224. Представимъ себѣ, что мы постепенно удаляемся отъ поверхности земли въ пространство и летимъ со скоростью, меньшею скорости свѣта; смотря все время по направленію къ землѣ, мы будемъ видѣть тѣ событія, которыя произошли на землѣ послѣ начала нашего полета. Если мы будемъ летѣть со скоростью свѣта, то будемъ видѣть только одно какое-либо событіе, которое видѣли въ началѣ этого новаго полета. Если же мы будемъ летѣть со скоростью, большею скорости свѣта, то должны увидѣть послѣдовательно всѣ событія въ обратномъ порядкѣ, т.-е. такъ, какъ если бы мы смотрѣли на синематографическую ленту, пропущенную въ аппаратъ съ конца; вслѣдствіе этого явилась бы возможность увидѣть и сотвореніе человѣка. Вѣрно ли это?

225. Радіусы колесъ любой величины равны между собой.

Черт. 16.



Вообразимъ себѣ два колеса, изъ которыхъ радіусъ одного есть $OA=R$, а другого OB, равный r. Центры этихъ двухъ колесъ находятся въ одной общей точкѣ O. При этомъ оба колеса скрѣплены другъ съ другомъ наглухо такъ, что если колесо радіуса R будетъ катиться по линіи AD', то въ то время, когда противоположная точкѣ A точка D большого колеса будетъ въ точкѣ D', точка C малаго будетъ въ точкѣ C', точки же A и B займутъ мѣста A' и B'. Положимъ, что въ то время,

когда большее колесо катится по линіи AD', малое будетъ катиться по линіи BC', параллельной, конечно, линіи AD', такъ какъ разность радіусовъ, т.-е. отрѣзки AB или $C'D'$ будутъ всегда постоянны. Въ то время, когда большое колесо пройдетъ разстояніе AD', равное полуокружности большого колеса, малое пройдетъ разстояніе BC', которое будетъ равно полуокружности малаго колеса; но $AD'=BC'$, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными. Такъ какъ AD' равно полуокружности большого колеса, то можемъ написать:

$$AD'=\frac{2\pi R}{2}=\pi R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такъ какъ BC' равна полуокружности малаго колеса, то, выражая длину этой линіи BC' въ частяхъ радіуса r, получимъ:

$$BC'=\frac{2\pi r}{2}=\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Вслѣдствіе же равенства линій AD' и BC' будемъ имѣть:

$$\pi R=\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Откуда имѣемъ:

$$R=r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т.-е. радіусы колесъ будутъ равны, несмотря на то, что одно колесо будетъ болѣе другого.

ОТВѢТЫ И РѢШЕНІЯ.

Ариѳметика.

1. Прежде чѣмъ улитка проползетъ послѣдніе 4 фута, она должна ползти 20—4=16 футовъ. Такъ какъ, поднимаясь въ первые 12 часовъ на 4, и опускаясь во вторые 12 часовъ на 3 фута, она всего въ 1 день проползетъ 4—3=1 футъ, то 16 футовъ она будетъ ползти 16 дней; проползая же въ послѣдніе 12 часовъ 4 фута, она доползетъ до верха стѣны; слѣдовательно всего она будетъ ползти 16 дней 12 часовъ, т.-е. $16^1/_2$ сутокъ.

Отвѣтъ: въ $16^1/_2$ сутокъ.

2. Продавецъ отдаетъ покупателю шляпу цѣною въ 15 рублей и 10 рублей сдачи; всего онъ здѣсь теряетъ 25 рублей. Деньги же, полученныя отъ сосѣда при размѣнѣ билета, онъ снова ему возвращаетъ. Слѣдовательно продавецъ всего теряетъ 25 рублей.

Отвѣтъ: 25 рублей.

3. На девятый. Отрѣзая предпослѣдній аршинъ, онъ тѣмъ самымъ отдѣлитъ отъ него и послѣдній.

4. Какой-нибудь поѣздъ, вышедшій изъ A, прежде всего встрѣтитъ вышедшіе изъ B въ предшествующія сутки 24 поѣзда, изъ которыхъ первый, какъ приходящій на станцію A въ моментъ отхода нашего поѣзда съ этой станціи не будетъ встрѣчнымъ. Поэтому изъ поѣздовъ предшествующихъ сутокъ встрѣтится 23 поѣзда. Далѣе, изъ поѣздовъ послѣдующихъ сутокъ, съ момента выхода нашего поѣзда со станціи A по пути встрѣтится всего 25 поѣздовъ, при чемъ 25-й поѣздъ встрѣчнымъ считать нельзя, такъ какъ онъ выходитъ изъ B въ моментъ при-

хода въ B нашего поѣзда. Поэтому изъ поѣздовъ послѣдующихъ сутокъ встрѣтится 24 поѣзда. Слѣдовательно всего будетъ встрѣчено $23+24=47$ поѣздовъ.

Отвѣтъ: 47 поѣздовъ.

5. Разрѣжемъ четыре апельсина каждый на три части, получимъ 12 частей, а послѣдніе 3 — каждый на 4 части — получимъ также 12 частей. Взявъ одну часть отъ первыхъ четырехъ апельсиновъ и одну часть отъ вторыхъ трехъ — будемъ имѣть одну двѣнадцатую часть отъ семи апельсиновъ.

6. Гири вѣсили: 1, 3, 9 и 27 фунтовъ.

7. Первый торговецъ на каждый рубль дѣлаетъ 7% скидки, т.-е. вмѣсто 1 рубля получаетъ: $100-7=93$ копейки. Далѣе онъ дѣлаетъ съ пониженной цѣны скидку въ 12%, т.-е. вмѣсто 1 рубля получаетъ 88 коп.; слѣдовательно онъ съ пониженнаго рубля, т.-е. съ 93 коп., получитъ:

$$\begin{matrix}100-88\\93-x\end{matrix}\Bigg|\ x=\frac{88\,.\,93}{100}=81\tfrac{21}{25}\text{ коп.}$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ относительно второго находимъ: каждый рубль за скидкой 12% обратится въ 88 коп.

Скидывая далѣе съ пониженной цѣны съ 1 руб. 7%, т.-е получая вмѣсто 1 руб.— 93 коп., онъ съ пониженнаго рубля, т.-е. съ 88 коп., получитъ:

$$\begin{matrix}100-93\\88-y\end{matrix}\Bigg|\ y=\frac{93\,.\,88}{100}=81\tfrac{21}{25}\text{ коп.}$$

Итакъ, и у того и у другого торговца покупать безразлично.

8. Разрѣжемъ каждое яблоко на 3 равныя части. Такихъ частей будетъ $8\,.\,3=24$; изъ нихъ каждый изъ трехъ товарищей долженъ получить по $24:3=8$ частей. У перваго же ученика такихъ частей до дѣлежа было $5\,.\,3=15$, а у второго $3\,.\,3=9$. Слѣдовательно первый, оставивъ себѣ 8 частей, отдѣлилъ третьему $15-8=7$ частей, а второй: $9-8=1$ часть. Поэтому первый изъ 8 коп. долженъ получить 7, а второй 1 копейку.

Отвѣтъ: 1-ый получитъ 7, а 2-ой — 1 коп.

9. Каждый автомобиль до встрѣчи проѣдетъ 240:2=120 верстъ, такъ какъ они встрѣтятся посрединѣ дороги; слѣдовательно каждый изъ нихъ, проѣзжая въ 1 часъ по 30 верстъ, проѣдетъ до встрѣчи 120:30=4 часа. Голубь же летаетъ со скоростью 40 верстъ въ 1 часъ, слѣдовательно въ 4 часа онъ пролетитъ 40.4=160 верстъ.

Отвѣтъ: 160 верстъ.

10. Если мать изъ наслѣдства получитъ нѣкоторую часть, т-е. нѣкоторую единицу наслѣдства, то сынъ, по завѣщанію, долженъ получить двѣ такихъ части, а дочь половину части, полученной матерью. Слѣдовательно всѣхъ частей, на которыя надо раздѣлить наслѣдство, будетъ: 1 часть матери, 2 части сына и $^1/_2$ части дочери, всего $3^1/_2$ части. По условію задачи эти $3^1/_2$ части должны составлять 14000 рублей. Если $3^1/_2$ части составляютъ 14000 руб., то одна часть будетъ въ $3^1/_2$ раза меньше, т.-е. $14000 : 3^1/_2 = \frac{14000 \cdot 2}{7} = 4000$ рублей. Отсюда видимъ, что мать, имѣя одну часть наслѣдства, получитъ 4000 руб., сынъ 4000.2=8000 руб., а дочь $4000.\frac{1}{2}=2000$ рублей.

Отвѣтъ: 4000, 8000 и 2000 рублей.

11. Разность между лѣтами отца и сына будетъ за все время ихъ жизни постоянна и равна 45—10=35 годамъ. Когда возрасты ихъ будутъ относиться какъ 9:4, разница эта будетъ та же, что и раньше, т.-е. 35 лѣтъ. Но разность частей будетъ 9—4=5. Слѣдовательно одна часть должна равняться 35:5=7 годамъ. Поэтому, когда ихъ возрасты будутъ относиться, какъ 9:4, отцу будетъ 7.9=63 года, а сыну 7.4=28 лѣтъ. Слѣдовательно требуемое задачей отношеніе лѣтъ наступитъ черезъ 63—45 или 28—10, т.-е. черезъ 18 лѣтъ.

Отвѣтъ: черезъ 18 лѣтъ.

12. Во второй разъ было куплено столовыхъ ложекъ вдвое болѣе, нежели въ первый. Пусть въ первый разъ тѣхъ и другихъ ложекъ было куплено вдвое болѣе, нежели на самомъ дѣлѣ; тогда за всю покупку, т.-е. за 10 столовыхъ и 14 чай-

ныхъ ложекъ, заплатили бы 112 рублей. Во второй разъ было куплено тоже 10 столовыхъ ложекъ, чайныхъ же на (14—3)=11 ложекъ менѣе. Поэтому 11 ложекъ и должны стоить 112—79 руб.= =33 рубля. Слѣдовательно 1 чайная ложка стоила 3 рубля. Зная цѣну чайной ложки, безъ труда найдемъ стоимость одной столовой. Она будетъ стоить: [56—(7.3)]:5=7 рублей.

Отвѣтъ: 3 руб. и 7 руб.

13. Такъ какъ 24 ведра въ первомъ стало послѣ того, какъ изъ второго боченка перелили въ него столько ведеръ, сколько въ немъ было, то находимъ, что было въ немъ 24:2=12 ведеръ. Слѣдовательно во второмъ до послѣдняго переливанія было 24+12=36 ведеръ. Но эти 36 ведеръ получились во второмъ послѣ того, какъ изъ перваго перелили въ него столько, сколько во второмъ было. Откуда заключаемъ, что во второмъ до переливанья было 36:2=18 ведеръ. Слѣдовательно въ первомъ было 48—18=30 ведеръ.

Отвѣтъ: 30 и 18 ведеръ.

14. Послѣднія 16 штукъ, отданныя четвертому лицу, составляли $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ оставшагося послѣ третьяго, откуда весь остатокъ равенъ: $16:\frac{2}{3}=24$ яблока. Эти 24 яблока были отданы четвертому. Но раньше, чѣмъ третьему были отданы 16 яблокъ, оставалось 16+24=40 яблокъ. Эти 40 яблокъ составляли $^2/_3$ того ихъ количества, которое осталось послѣ второго, такъ какъ передъ этимъ третьему была отдана $^1/_3$ остатка отъ второго. Но если $^2/_3$ остатка равны 40 яблокамъ, то весь остатокъ отъ второго равенъ: $40:\frac{2}{3}=60$ яблокъ. Но раньше, чѣмъ второму было отдано 16 яблокъ, остатокъ былъ 60+16=76 яблокъ. Эти 76 яблокъ составляли $^2/_3$ того, что осталось послѣ перваго. Откуда весь остатокъ равенъ: $76:\frac{2}{3}=114$ яблокъ. Раньше же, чѣмъ первому было отдано 16 яблокъ, ихъ было: 114+16=130 яблокъ. Эти 130 яблокъ составляли $^2/_3$ первоначальнаго ихъ количества. Слѣдовательно всего ихъ было: $130:\frac{2}{3}=195$ яблокъ.

Отвѣтъ: 195 яблокъ.

15. Если бы въ ящикѣ вмѣсто смѣси былъ только изюмъ, то ящикъ вѣсилъ бы 4 ф. а не $4^1/_2$ ф. Избытокъ въ $^1/_2$ ф. является оттого, что вмѣсто части изюма входитъ въ смѣсь миндаль, вѣсъ котораго меньше (при томъ же объемѣ). Такъ какъ на 1 ф. миндалю приходится по объему $^2/_3$ ф. изюма (что слѣдуетъ изъ того, что въ ящикъ входитъ или 6 ф. миндалю или 4 ф. изюма, откуда видимъ, что на 1 ф. миндалю приходится $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ф. изюма), то на 1 ф. миндалю разница въ вѣсѣ будетъ $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ф. Если во всей смѣси разница въ вѣсѣ $^1/_2$ ф., а на 1 ф. разница въ вѣсѣ $^1/_3$ ф., то всего фунтовъ миндалю было: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=1^1/_2$ фунта. Отсюда видимъ, что изюму входило въ смѣсь $4^1/_2-1^1/_2=3$ ф. Каждый сортъ стоилъ 108 : 2=54 коп. Слѣдовательно 1 ф. миндалю стоитъ: $54:1^1/_2=36$ коп., а 1 ф. изюма: 54 : 3=18 коп.

Алгебраическое рѣшеніе этой задачи слѣдующее:

Пусть въ смѣси было x фунтовъ миндалю, тогда, такъ какъ на 1 ф. миндалю приходится $^2/_3$ ф. изюма, то на x ф. миндалю (по объему) придется $^2/_3x$ изюма; другими словами: x ф. миндалю вѣсятъ столько же, сколько и $^2/_3\,x$ ф. изюма. Если въ смѣсь входило x ф. миндалю, то изюму входило $(4^1/_2-x)$ фунтовъ. По условію задачи въ ящикъ входило всего 4 ф. изюма, а такъ какъ вмѣсто x фунтовъ миндалю можно взять такой же объемъ изюму, равный $^2/_3x$ фунта, то:

$$\frac{2}{3}x+(4\frac{1}{2}-x)=4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Откуда $x=1^1/_2$ фунта . . . . . (2) и т. д.

Отвѣтъ: 36 коп.; 18 коп.

16. Когда минутная стрѣлка проходитъ весь циферблатъ, т.-е. 60 дѣленій, часовая проходитъ 5 тѣхъ же дѣленій. Слѣдовательно часовая стрѣлка движется въ $5:60=\frac{1}{12}$ раза медленнѣе минутной. Поэтому, когда минутная стрѣлка пройдетъ одно дѣленіе циферблата (т.-е. черезъ 1 минуту), часовая пройдетъ $^1/_{12}$ этого дѣленія. Отсюда видимъ, что каждую минуту минутная стрѣлка нагоняетъ часовую на $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ дѣленія. Когда

минутная стрѣлка была на 12 часахъ, часовая была на 1 часѣ; разница между ними была 5 дѣленій. Нагоняя каждую минуту на $^{11}/_{12}$ дѣленія и находясь вначалѣ на 5 дѣленій сзади часовой, она ее догонитъ черезъ $5 : \frac{11}{12} = 5^{5}/_{11}$ минуты. Слѣдовательно стрѣлки совпадутъ черезъ $5^{5}/_{11}$ минуты или черезъ 5 минутъ $27^{3}/_{11}$ секунды.

Отвѣтъ: 1 ч. 5 м. $27^{3}/_{11}$ сек.

17. Если сложимъ: $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{75}{84}=\frac{25}{28}$, то $\frac{25}{28}$ выразитъ намъ часть жизни, которая протекла до женитьбы Діофанта. Слѣдовательно отъ женитьбы до конца его жизни протекли: $1-\frac{25}{28}=\frac{3}{28}$ части. Изъ условій задачи видно, что эта часть равняется: 5+4=9 годамъ. Поэтому онъ жилъ: $9 : \frac{3}{28}=84$ года.

Отвѣтъ: 84 года.

18. Пароходъ, идя по теченію рѣки, въ 1 часъ проходитъ $^{1}/_{3}$ всего разстоянія, а идя противъ теченія $\frac{1}{4^{1}/_{2}}=\frac{2}{9}$ этого разстоянія. Если бы пароходъ шелъ 1 часъ по теченію отъ A къ B, а другой часъ противъ теченія, т.-е. въ обратную сторону отъ B къ A, то разница въ пройденномъ разстояніи въ ту и другую сторону т.-е. $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ выразитъ намъ, насколько пароходъ въ эти 2 часа отнесло теченіемъ къ городу B. Такимъ образомъ, если эту скорость теченія рѣки раздѣлимъ на 2, то результатъ укажетъ намъ скорость теченія рѣки въ 1 часъ, т.-е. $\frac{1}{9} : 2=\frac{1}{18}$. Такимъ образомъ боченокъ, брошенный по теченію рѣки, въ 1 часъ пройдетъ $^{1}/_{18}$ всего разстоянія между городами A и B. Слѣдовательно все разстояніе онъ пройдетъ въ $1 : \frac{1}{18}=18$ часовъ.

Отвѣтъ: въ 18 часовъ.

19. Если первый поѣздъ въ 1 часъ проходитъ 30 верстъ, то въ 1 минуту онъ пройдетъ $\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ версты, а въ 1 секунду $\frac{1}{2.60}=$ $=\frac{1}{120}$ версты. Такимъ же образомъ второй поѣздъ пройдетъ въ се-

кунду $\frac{40}{60 \cdot 60} = \frac{1}{90}$ версты. Въ теченіе 6 секундъ первый поѣздъ пройдетъ $\frac{1}{20} \cdot 6$ версты $= \frac{1}{20}$ версты, второй же въ 6 сек. пройдетъ $\frac{1}{90} \cdot 6 = \frac{1}{15}$ версты. Слѣдовательно длина перваго поѣзда будетъ $\frac{1}{20}$ версты плюсъ разстояніе, пройденное вторымъ поѣздомъ, т.-е. $\frac{1}{15}$ версты, такъ какъ пассажиру, сидящему во второмъ поѣздѣ, первый показался короче дѣйствительнаго потому, что второй поѣздъ въ это время также шелъ, кромѣ того первый поѣздъ покажется короче на разстояніе, пройденное въ 12 секундъ вторымъ поѣздомъ, т.-е. на $\frac{1}{15}$ верстъ. Отсюда слѣдуетъ, что длина перваго поѣзда будетъ: $\frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{3+4}{60} = \frac{7}{60}$ версты или $\frac{7.500}{60}$ саж. $= 58^1/_3$ саж. $= 58$ саж. 1 арш.

Отвѣтъ: 58 саж. 1 арш.

20. Разница въ длинѣ цѣпей будетъ по условію задачи равна: 3 арш. 9 вер.—2 арш. 11 вер. $=14$ вер., при чемъ извѣстно, что на эту разницу приходится 15 колецъ. Дѣля 14 на 15, узнаемъ внутренній діаметръ каждаго кольца, онъ равенъ $^{14}/_{15}$ вершка. Но длина цѣпи равна внутреннему діаметру кольца, умноженному на число колецъ въ цѣпи, съ приложеніемъ къ этой длинѣ толщины двухъ боковыхъ колецъ. Толщина двухъ боковыхъ колецъ есть по условію $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ вер. Вычитая толщину двухъ боковыхъ колецъ изъ длины цѣпи и дѣля результатъ на діаметръ кольца, будемъ имѣть число колецъ въ цѣпи. Слѣдовательно, чтобы узнать число колецъ въ цѣпи, длиною въ 3 арш. 9 вер.$=57$ вер., вычитаемъ толщину двухъ боковыхъ колецъ, равную 1 вер., получимъ $57-1=56$ вер. и дѣлимъ результатъ на $\frac{14}{15}$; откуда имѣемъ: $56 : \frac{14}{15} = 60$. Итакъ, одна цѣпь имѣетъ 60 колецъ. Другая же: $60-15=45$ колецъ. Опредѣляя непосредственно, имѣемъ 2 арш. 11 в.$=43$ в.; $43-1=42$ в.; $42 : \frac{14}{15} = 45$ колецъ.

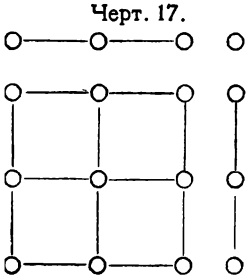
Отвѣтъ: 60 и 45 колецъ.

21. Сумма первыхъ девяти цифръ равна: 1+2+3+4+5+6+ +7+8+9=45; слѣдовательно, сумма цифръ каждаго числа, записаннаго каждымъ изъ лицъ, должна равняться 45 : 3=15. Всѣ числа, которыя будутъ начинаться съ 1, могутъ быть только 159 и 168 (каждый записалъ наименьшее число, слѣдовательно, не можетъ быть 195 при этихъ трехъ цифрахъ, и 186 при цифрахъ: 1, 8 и 6). Съ цифры 2 могли быть написаны числа: 249 и 267 (по тѣмъ же причинамъ). Съ цифры 3 только 348 и 357, а съ цифры 4 — 456. Но число 456 не могло быть написано, такъ какъ разность между суммой 516 и этимъ числомъ есть 60, а не трехзначное число, что необходимо потому, что оба числа, написанныя каждымъ лицомъ, были трехзначными. Чиселъ, начинающихся съ цифръ 5, 6 и 7 быть не можетъ, такъ какъ сумма цифръ ихъ болѣе 15, а съ 8 и 9 не будетъ начинаться потому, что у каждаго лица во всякомъ случаѣ будутъ по 2 цифры меньшихъ 8 и 9. Слѣдовательно, если у каждаго было записано число 159, то у другого было 267 и у третьяго 348, а второй разъ соотвѣтственно 168, 249 и 357.

Отвѣтъ: 159, 167 и 348 и 168, 249 и 357.

22. Вообразимъ себѣ квадратъ 3×3 въ видѣ девяти кружковъ. Для того, чтобы получить квадратъ, сторона котораго на единицу больше, надо прибавить съ двухъ смежныхъ сторонъ по 3 кружка и, кромѣ того, 1 кружокъ между ними въ уголъ. Такъ же получимъ и квадратъ со сторонами въ 5, 6 и т. д. кружковъ изъ предыдущаго. Отсюда вытекаетъ общее правило: разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ (напр., 4^2-3^2; 5^2-4^2 и т. д.) равна удвоенному меньшему числу, сложенному съ единицей. Напр.,

Черт. 17.



$$4^2-3^2=16-9=7=2\,.\,3+1.$$
$$5^2-4^2=25-16=9=2\,.\,4+1\ldots \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, при рѣшеніи нашей задачи разсуждаемъ такъ:

При построеніи большаго квадрата изъ неизвѣстнаго числа копѣекъ, у насъ не хватило 8 копѣекъ, не считая тѣхъ 5, которыя оказались лишними, при построеніи меньшаго квадрата. Слѣдовательно, чтобы построить большій квадратъ, намъ надо добавить: 5+8=13 копѣечныхъ монетъ. Отсюда видимъ, что въ данномъ случаѣ число 13 выражаетъ разность двухъ послѣдовательныхъ квадратовъ. При этомъ условіи сторона меньшаго квадрата равна $\frac{13-1}{2}=6$ монетамъ. Полагая, что монеты были разложены не только по сторонамъ квадрата, а такъ, что они находились и внутри его, т.-е. полагая, что въ квадратѣ находилось $6\times6=36$ монетъ, имѣемъ, что всего монетъ было: 36+5=41. Если же монеты были расположены только по сторонамъ квадрата, то ихъ было $2.6+2.4=20$, такъ какъ съ двухъ противоположныхъ сторонъ ихъ находилось: 6+6= =2.6=12, а съ двухъ остальныхъ по 4, такъ какъ по двѣ боковыхъ уже были причтены къ первымъ двумъ сторонамъ. Если къ 20 монетамъ прибавимъ недостающія 5, то получимъ окончательно 20+5=25 монетъ. Итакъ, имѣемъ: въ первомъ смыслѣ 41 монету, а во второмъ 25, смотря по тому, какъ мы будемъ понимать задачу.

Отвѣтъ: 41 или 25.

23. Разность между двузначнымъ числомъ и обратнымъ ему обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма цифръ этой разности всегда равна 9. [Такъ, если число будетъ $10a+b$, то обратное ему $10b+a$, а разность между ними: $10a+b-(10b+a)=10a+b-$ $-10b-a=9a-9b=9(a-b)$. Отсюда видимъ, что разность должна быть кратной 9. А такъ какъ разность эта есть число двузначнее, то сумма цифръ ея не можетъ быть равна ни 18, ни 27 и т.д., а только девяти, такъ какъ разность между двузначнымъ и обратнымъ ему не можетъ быть 99 и больше, самое большее она будетъ: 91—19=72. Отсюда заключаемъ, что сумма цифръ должна равняться 9]. Слѣдовательно, цифра десятковъ разности будетъ: 9—7=2, а разность 27. Найдемъ сумму искомаго числа и обратнаго ему. Складывая цифру единицъ искомаго числа съ цифрой единицъ ему обратнаго, мы получимъ 13,

т.-е. сумму цифръ даннаго числа. Складывая же цифры десятковъ, мы получимъ тѣ же 13, потому что эти цифры будутъ тѣми же, что и цифры единицъ, только расположенныя наоборотъ. Слѣдовательно, сумма этихъ двухъ чиселъ будетъ: 13 десятковъ + 13 единицъ, т.-е. 130+13=143. Зная же сумму и разность двухъ чиселъ, мы легко найдемъ и сами числа. Вычтя изъ суммы 143 избытокъ одного числа надъ другимъ и дѣля результатъ на 2, получимъ меньшее число, т.-е. обратное данному. Итакъ, 143—27=116; 116 : 2=58. Переставивъ цифры найденнаго числа, получимъ искомое.

Отвѣтъ: 85.

24. Всѣ платки стоили 350 . 11=38 руб. 50 коп. По условію задачи, за эту цѣну купецъ продалъ часть купленныхъ имъ платковъ. Вслѣдствіе того, что количество платковъ и цѣна за каждый суть числа цѣлыя, то, очевидно, что 38 руб. 50 коп. должно дѣлиться безъ остатка, какъ на количество платковъ, такъ и на цѣну платка. Кромѣ того, цѣна каждаго проданнаго платка должна быть числомъ, кратнымъ 50, что слѣдуетъ изъ условій задачи, а число платковъ не болѣе 11.

Представимъ число 3850 въ видѣ произведенія двухъ множителей, при чемъ такъ, чтобы одно изъ нихъ оканчивалось на нуль, такъ какъ оно, представляя цѣну платка, будетъ кратнымъ 50. Разлагая данное число, имѣемъ:

350 . 11; 35 . 110; 550 . 7; 55 . 70; 3850 . 1; 385 . 10. (1)

Выбираемъ изъ нихъ тѣ, у которыхъ одинъ множитель будетъ кратнымъ 50. Тогда имѣемъ:

350 . 11; 550 . 7; 3850 . 1 . . . . . (2)

Первое произведеніе 350 . 11 не будетъ удовлетворять задачѣ, такъ какъ, по условію, купецъ продалъ часть платковъ, а не всѣ 11. Произведеніе же 550 . 7 удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи.

Третье произведеніе 3850 . 1 не можетъ быть пригодно въ силу того, что купецъ не могъ продать одинъ платокъ за 38 руб. 50 коп., купивъ его за 3 руб. 50 коп. Итакъ, имѣемъ одно рѣшеніе: купецъ продалъ 7 платковъ, взявъ за каждый 5 руб. 50 коп.

Отвѣтъ: 7 платковъ.

25. Взявъ какое-нибудь произвольное число, напр., 123, образуемъ изъ его цифръ всевозможныя двузначныя числа. Ихъ будетъ 6 слѣдующихъ:

12; 21; 13; 31; 23; 32 . . . . . (1)

Сложивъ всѣ эти 6 двузначныхъ чиселъ, имѣемъ:

$$12+21+13+31+23+32=132=11.12=22.6=22(1+2+3) \quad (2)$$

Возьмемъ число 247; образуемъ двузначныя числа:

27; 72; 24; 42; 47; 74 . . . . . (3)

Складываемъ ихъ:

$$27+72+24+42+47+74=286=22.13=22(2+4+7) \quad (4)$$

Изъ равенствъ (2) и (4) видимъ, что сумма всѣхъ двузначныхъ чиселъ въ 22 раза больше суммы цифръ даннаго трехзначнаго числа.

Слѣдовательно, данная задача сводится къ нахожденію такого трехзначнаго числа, которое было бы равно суммѣ его цифръ, увеличенной въ 11 разъ, такъ какъ оно должно быть вдвое меньше этой суммы. Такое число должно быть кратнымъ одиннадцати.

Сумма цифръ искомаго числа не должна превышать суммы трехъ девятокъ, такъ какъ наибольшее трехзначное число есть 999, т.-е. она не можетъ быть больше 27, а самое число, какъ кратное 11, не будетъ больше $27.11=297$.

Такъ какъ между числами 100 и 297 числа 199 и 289 имѣютъ наибольшую сумму цифръ (19), то число $11.19=209$ должно быть крайнимъ предѣломъ искомаго числа.

Это число должно быть кратное 11, а потому находится въ ряду:

$$11.10;\ 11.11;\ 11.12;\ 11.13;\ 11.14;\ 11.15;\ 11.16;\ 11.17;\ 11.18;\ 11.19;$$

такъ какъ $11.19=209$ есть предѣлъ. Перемножая числа написаннаго ряда, имѣемъ:

110; 121; 132; 143; 154; 165; 176; 187; 198; 209 . (5)

Замѣтивъ, что сумма цифръ искомаго числа должна быть болѣе 9, такъ какъ $9.11=99$ представляетъ только дву-

значное число, исключаемъ изъ ряда (5) числа, сумма цифръ которыхъ меньше 9.

Послѣ этого останется рядъ:

$$154;\ 165;\ 176;\ 187;\ 198;\ 209\ \ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Ищемъ въ ряду (6) такія числа, которыя равны суммѣ цифръ, увеличенной въ 11 разъ, тогда числа

$$154,\ 165,\ 176,\ 187 \text{ и } 209\ \ldots\ldots\ldots\ (7)$$

не будутъ удовлетворять этому условію и у насъ останется единственное число 198, которое удовлетворяетъ поставленному условію, т.-е.

$$198=111\,.\,8=11\,.\,(1+9+8)\ \ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Дѣйствительно

$$\frac{18+81+19+91+89+98}{2}=\frac{396}{2}=198\ \ldots\ldots\ (9)$$

Алгебраическое рѣшеніе этой задачи слѣдующее: Обозначимъ искомое число черезъ

$$100x+10y+z\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Тогда, по условію задачи:

$$(10x+y)+(10y+x)+(10x+z)+(10z+x)+(10y+z)+(10z+y)=$$
$$=2(100x+10y+z)\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Равенство (2) даетъ послѣ преобразованія ур—іе:

$$89x-y-10z=0\ \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

или

$$89x=10z+y\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Такъ какъ z есть цифра единицъ искомаго числа и вообще x, y и z цифры даннаго числа, то выраженіе $10z+y$, должно быть двузначнымъ числомъ; но двузначнымъ числомъ оно можетъ быть только тогда, когда $89x$ число двузначное, а оно будетъ имъ только при $x=1$. Тогда

$$89=10z+y\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

откуда заключаемъ, что

$$z=8,\ y=9.$$

Слѣдовательно все число будетъ:

$$100x+10y+z=100\,.\,1+10\cdot 9+8=198,$$

т.-е. имѣемъ прежній отвѣтъ.

Отвѣтъ: 198.

26. Найдемъ предварительно рядъ чиселъ, дѣлящихся на 11 и на 13, съ остаткомъ 1. Первымъ такимъ числомъ будетъ $11 \cdot 13+1=144$. Вторымъ: $144+11 \cdot 13=144+143=287$. Третьимъ $287+143=430$ и т. д. Всѣ числа, дѣлящіяся на 11 и 13 съ остаткомъ 1, напишутся въ слѣдующемъ ряду:

144, 287, 430, 573, 616, 759 и т. д. . . . . (1)

Въ этомъ ряду надо найти число, дѣлящееся на 17 съ остаткомъ 11. Найдемъ въ рядѣ (1) такое число. Для этого надо вычесть изъ каждаго написаннаго въ рядѣ (1) числа 11 и полученныя числа дѣлить на 17, пока не получится цѣлое частное.

Вычитая изъ каждаго числа 11, имѣемъ рядъ:

133, 276, 419, 562 и т. д. . . . . (2)

при чемъ видимъ, что каждое послѣдующее число больше предыдущаго на 143*)

Представимъ число 133 въ слѣдующемъ видѣ

$$133=17 \cdot 7+14. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

а число 143, которое прибавляется къ каждому числу для полученія слѣдующаго, такъ:

$$143=17 \cdot 8+7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Изъ ряда (2) заключаемъ, что второе число равно первому, сложенному съ числомъ 143; третье — первому, сложенному съ удвоеннымъ числомъ 143; четвертый — первому + утроенное число 143 и т. д.

Найдемъ, напр., 10-е число ряда (2). Оно равно первому, сложенному съ удевятереннымъ числомъ 143, т.-е.

$$10\text{-е число}=133+9 \cdot 143=(17 \cdot 7+14)+9 \cdot (17 \cdot 8+7)$$

или

$$10\text{-е число}=17 \cdot 7+14+17 \cdot 8 \cdot 9+9 \cdot 7=17(7+8 \cdot 9)+7(2+9). \quad (5)$$

Первая часть послѣдней суммы (5) дѣлится на 17 безъ остатка, вторая же не дѣлится. Замѣтивъ далѣе, что число 9 во

*) Т.-е. рядъ (2) есть ариѳметическая прогрессія съ разностью 143.

второй части указываетъ на то, сколько разъ мы взяли въ данномъ случаѣ слагаемымъ число 143, т.-е. указываетъ сколько предшествуетъ чиселъ нами написанному числу въ рядѣ (2), заключаемъ, что для того, чтобы вторая часть дѣлилась на 17, необходимо имѣть на мѣстѣ числа 9 число 15, тогда послѣднее слагаемое суммы (5) обратится въ $7(2+15)=7\,.\,17$.

Поэтому надо взять 16-е отъ начала ряда число; оно будетъ:

$$133+15\,.\,143=133+2145=2278 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Прибавивъ къ найденному числу 11, получимъ искомое:

$$2278+11=2289.$$

Алгебраическое рѣшеніе этой задачи слѣдующее:

Обозначимъ искомое число черезъ x. По условію задачи имѣемъ:

$$\frac{x-1}{11}=y;\quad \frac{x-1}{13}=z;\quad \frac{x-11}{17}=v \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ y, z и v соотвѣтствующія частныя.

Изъ ур—ій (1) имѣемъ:

$$x-1=11y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$x-1=13z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$x-11-17v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) имѣемъ:

$$11y=13z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Преобразуемъ ур—іе (4) слѣдующимъ образомъ:

$$x-11=(x-1)-10=11y-10=17v \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

такъ какъ $x-1=11y$.

Рѣшимъ неопредѣленное ур—іе:

$$11y-10=17v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

имѣемъ корни:

$$v=2-11t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$y=4-17t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Вставляемъ въ ур—іе (5) значеніе y изъ рѣшенія (9), имѣемъ

$$11(4-17t)=13z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

что послѣ преобразованія даетъ ур—іе:

$$13z+187t=44 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

корнями котораго будутъ:

$$z=187t_1-11 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$
$$t=13t_1-1 \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Изъ равенства (3) имѣемъ, вставляя вмѣсто z его значеніе изъ равенства (12):

$$x-1=13(187t_1-11)\ldots\ldots\ldots (14)$$

или $$x-1=2431t_1-143 \ldots\ldots\ldots (15)$$

откуда $$x=2431t_1-142 \ldots\ldots\ldots (16)$$

Такимъ образомъ мы нашли для x значеніе, удовлетворивъ послѣдовательно всѣмъ условіямъ задачи.

Такъ какъ намъ надо найти наименьшее число, то необходимо дать t_1 значеніе 1, такъ какъ при $t_1=0$ получится отрицательное рѣшеніе. Положивъ $t_1=1$, имѣемъ:

$$x=2431-142=2289.$$

Отвѣтъ: 2289.

27. Если бы мы дѣлили произведеніе 42***875 на множителя 743, мы получили бы другой множитель *7***. Произведемъ это дѣленіе. Цифра единицъ числа *7*** можетъ быть только **5**, такъ какъ нѣтъ больше ни одной цифры, которая, будучи умножена на 3, дала бы цифру единицъ произведенія **5**. Умноживъ найденную цифру частнаго **5** на дѣлителя и вычтя результатъ изъ числа 42***875, получимъ сумму произведеній числа 743 на всѣ цифры числа *7**5, кончая цифрой десятковъ (т.-е. безъ цифры единицъ). Такъ какъ цифра десятковъ неизвѣстнаго частнаго, будучи умножена на 743, должна давать послѣдней цифрой 6, что видно по числу 42***16, то заключаемъ, что эта цифра можетъ быть только 2. Умножая цифру десятковъ частнаго на 743 и вычитая результатъ изъ числа 42***16, получимъ сумму произведеній числа 743 на всѣ цифры числа *7*25, кончая уже цифрой сотенъ.

42***875	743
3715	*7***
42***16	125
86	
42***3	

Разсуждая по предыдущему, находимъ, что цифра сотенъ можетъ быть только 1. Итакъ, мы число *7*** можемъ написать въ видѣ *7125. Остающаяся неизвѣстной цифра частнаго на будетъ 6, такъ какъ 6.7=42, а въ силу этого двѣ послѣднія слѣва цифры дѣлимаго 42***875 послѣ прибавленія къ нимъ

оставшихся лишнихъ единицъ слѣдующаго высшаго класса (въ данномъ случаѣ милліонныя) будутъ уже не 42, а больше. Слѣдовательно послѣдняя искомая цифра будетъ 5 или меньше. При подстановкѣ находимъ, что 5 и есть недостающая цифра. Откуда находимъ множимое 57125 и произведеніе 42442875.

Отвѣтъ: 57125 и 42442875.

28. Для нумераціи первыхъ 9 страницъ необходимо было 9 цифръ, для слѣдующихъ 90 страницъ необходимо было 180 цифръ а для слѣдующихъ 900 страницъ — 2700 цифръ, такъ какъ первыя 9 страницъ перенумеровываются по одной цифрѣ каждая страница, слѣдующія 90 по 2, и 900 по 3. Складывая 2700+ +180+9 получаемъ 2889 цифръ. Отсюда заключаемъ, что даннымъ въ задачѣ числомъ цифръ (2775) перенумеровано больше 100 и меньше 1000 страницъ. Если изъ 2775 вычтемъ 189 цифръ, которыми перенумерованы первыя 99 страницъ, то разность 2586 дастъ намъ число цифръ, которыми перенумерованы страницы по 3 цифры въ каждой. Дѣля 2586 на 3, найдемъ число страницъ, перенумерованныхъ по 3 цифры, ихъ будетъ: 2586 : 3=862 страницы. Прибавляя 99 страницъ, имѣемъ окончательно: 862+99=961 страницъ.

Отвѣтъ: 961 страница.

29. Чтобы перенумеровать первыя 9 страницъ надо 9 цифръ; для слѣдующихъ 90 страницъ — 180 цифръ, для слѣдующихъ 900 страницъ — 2700 цифръ. Такимъ образомъ, чтобы перенумеровать въ книгѣ страницы до 1000-й, надо 2700+180+9=2889 цифръ. Слѣдующія страницы перенумеровываются по 4 цифры каждая. Такихъ страницъ по условію задачи будетъ 1500—999=501. На нихъ употреблено 501 . 4=2004 цифры. Всего же употреблено было 2889+2004=4893 цифры.

Отвѣтъ: 4893 цифры.

30. Запятую.

31. Всякое число, написанное по системѣ счисленія 2, можно представить въ видѣ:

$$2^m+2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots+2^2+2^1+1 \ldots\ldots (1)$$

Въ этой системѣ существуютъ только 2 цифры: 0 и 1. Слѣдовательно, четное число представится, какъ сумма различныхъ

степеней двухъ, а нечетное — таже сумма, сложенная съ единицей.

Такъ, напр.,

четное $46=(101110)_2=2^5+2^3+2^2+2;$

нечетное $37=(100101)_2=2^5+2^2+1.$

32. Всякую десятичную дробь, напр., 0,53821 можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$0{,}53821=\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{2}{10000}+\frac{1}{100000} \quad \ldots \quad (1)$$

или

$$0{,}53821=\frac{5}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{1}{10^5} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Аналогично такой дроби надо представить и дробь $\frac{155}{256}$, но написанной по системѣ счисленія 8.

Напишемъ данную дробь $\frac{155}{256}$ аналогично десятичной, то-есть такъ же, какъ представлена дробь 0,53821 въ строкѣ (2). Имѣемъ:

$$\frac{155}{256}=\frac{t}{8}+\frac{t_1}{8^2}+\frac{t_2}{8^3}+\frac{t_3}{8^4}+\cdots$$

гдѣ t, t_1, t_2 и т. д. неизвѣстныя цифры этой дроби, написанной по восьмиричной системѣ счисленія.

Умножая на 8 обѣ части, имѣемъ:

$$\frac{155}{128}=t+\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\frac{t_3}{8^3}+\cdots$$

или

$$\frac{155}{128}=1+\frac{27}{128}=t+\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\cdots$$

Отсюда видимъ, что

$$t=1.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{27}{128}=\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\frac{t_3}{8^3}+\cdots$$

Умножая обѣ части на 8, имѣемъ:

$$\frac{27}{16}=t_1+\frac{t_2}{8}+\frac{t_3}{8^2}+\cdots$$

или

$$\frac{27}{16}=1+\frac{11}{16}=t_1+\frac{t_2}{8}+\frac{t_3}{8^2}+\cdots$$

Откуда $t_1=1.$

Слѣдовательно, $\frac{11}{16}=\frac{t_2}{8}+\frac{t_3}{8^2}+\cdots$

Умножая снова на 8, имѣемъ:

$$\frac{11}{2}=t_2+\frac{t_3}{8}+\frac{t_4}{8^2}+\cdots$$

или $$\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}=t_2+\frac{t_3}{8}+\frac{t_4}{8^2}+\cdots$$

Откуда $t_2=5.$

Слѣдовательно, $\frac{1}{2}=\frac{t_3}{8}+\frac{t_4}{8^2}+\cdots$

Снова умножая на 8, имѣемъ:

$$4=t_3+\frac{t_4}{8}+\cdots$$

Отсюда $t_3=4,$

а остальная сумма, т.-е.

$$\frac{t_4}{8}+\frac{t_5}{8^2}+\cdots\infty=0.$$

Итакъ, $\frac{155}{256}=\frac{t}{8}+\frac{t_1}{8^2}+\frac{t_2}{8^3}+\cdots=\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{4}{8^4}=(0,1154)_8,$

гдѣ знакъ 8 въ выраженіи $(0,1154)_8$ указываетъ на систему счисленія.

Отвѣтъ: 0,1154.

33. Данныя числа 235 и 433 написаны по семиричной системѣ. Будемъ перемножать ихъ не переводя въ десятичную слѣдующимъ образомъ, помня, что каждыя 7 единицъ какого-нибудь порядка составляютъ 1 единицу слѣдующаго.

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times 433 \\ \hline 1041 \\ 1041 \\ 1306 \\ \hline 142351 \end{array}$$

Производимъ умноженіе по общимъ правиламъ. Говоримъ: трижды 5=15; но 15 въ семиричной системѣ счисленія равно $2\cdot 7+1$, т.-е. содержитъ 1 единицу перваго порядка и 2 второго. Поэтому пишемъ 1, а 2 держимъ въ умѣ. Далѣе: $3\times 3=9$, да еще 2 единицы, бывшія въ умѣ, будетъ 11 единицъ; но $11=1\cdot 7+4$; слѣд., пишемъ 4, а 1 единица въ умѣ. Далѣе: $2\times 3=6$, да 1 еди-

ница, будетъ 7 единицъ, т.-е. 1 единица слѣдующаго порядка; поэтому пишемъ 0, а затѣмъ послѣднюю единицу.

Такова же будетъ вторая строка произведенія. Пишемъ ее, отставляя по правиламъ на одинъ порядокъ влѣво.

Затѣмъ множимъ 235 на 4. Имѣемъ: $5\times4=20=2\,.\,7+6$. Пишемъ 6, а 2 единицы въ умѣ. Далѣе: $3\times4=12$, да еще 2 единицы, будетъ 14 или $2\,.\,7$, т.-е. 2 единицы слѣдующаго порядка. Поэтому пишемъ 0, а 2 въ умѣ. Затѣмъ: $2\times4=8$, да 2 единицы, будетъ 10 единицъ, т.-е. $1\,.\,7+3$. Слѣд., пишемъ 3, а 1 пишемъ на мѣстѣ слѣдующаго порядка.

Теперь складываемъ: пишемъ первую справа единицу, затѣмъ складываемъ 4 и 1, и пишемъ 5. Далѣе: $0+4+6=10=1\,.\,7+3$, т.-е. 3 единицы 3-го порядка, которыя и пишемъ, плюсъ 1 единица слѣдующаго, которую держимъ въ умѣ. Затѣмъ получимъ: $1+0+0$ да еще 1 единица, бывшая въ умѣ, всего 2 единицы, которыя и пишемъ. Далѣе пишемъ 4 и, наконецъ, послѣднюю единицу. Получаемъ произведеніе: 142351.

Повѣримъ наше умноженіе:

Переводимъ множители въ десятичную систему; имѣемъ:

$$235=2\,.\,7^2+3\,.\,7+5=124.$$
$$433=4\,.\,7^2+3\,.\,7+3=220.$$

Перемножаемъ обыкновеннымъ образомъ, имѣемъ:

$$124\,.\,220=27280.$$

Переводимъ число 27280, изображенное по десятичной системѣ, въ систему счисленія семиричную; имѣемъ:

$$27280=7\,.\,3897+1=7(7\,.\,556+5)=1+7^2\,.\,556+5\,.\,7+1=$$
$$=7^2(7\,.\,79+3)+5\,.\,7+1=7^3\,.\,79+3\,.\,7^2+5\,.\,7+1=$$
$$=7^3(7\,.\,11+2)+3\,.\,7^2+5\,.\,7+1=7^4\,.\,11+7^3\,.\,2+3\,.\,7^2+5\,.\,7+1=$$
$$=7^4(7\,.\,1+4)+2\,.\,7^3+3\,.\,7^2+5\,.\,7+1=$$
$$=1\,.\,7^5+4\,.\,7^4+2\,.\,7^3+3\,.\,7^2+5\,.\,7+1.$$

Такимъ образомъ, получаемъ то же число $(142351)_7$.

Отвѣтъ: 142351.

34. Въ любой системѣ счисленія съ произвольнымъ основаніемъ x имѣемъ:

$$(144)_x=x^2+4x+4=(x+2)^2,$$

т.-е. 144 для всякой системы счисленія (конечно, при $x>4$) будетъ точнымъ квадратомъ.

35. Въ любой системѣ счисленія съ произвольнымъ основаніемъ имѣемъ:

$$(1331)_x=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3 \ldots\ldots (1)$$

т.-е. $(1331)_x$ будетъ точнымъ кубомъ (при ограниченіи $x>3$) во всякой системѣ съ основаніемъ x. (При $x<3$ не можетъ существовать цифра 3).

36. Если 120 коровъ поѣли траву съ луга въ 20 акровъ въ 16 дней, то съ луга въ 1 акръ въ 16 дней поѣдятъ траву $\frac{120}{20}=6$ коровъ, а съ 14 акровъ въ 16 дней: $6\,.\,14=84$ коровы. Если 20 коровъ поѣли траву съ луга въ $3^1/_2$ акра въ 18 дней, то съ луга въ 1 акръ въ 18 дней поѣдятъ траву $20:3^1/_2=20:\frac{7}{2}=\frac{40}{7}$ коровъ, а съ 14 акровъ въ 18 дней: $\frac{40}{7}\,.\,14=80$ коровъ. Слѣдовательно:

84 коровы въ 16 дней поѣли первоначальное количество травы съ луга въ 14 акровъ плюсъ приращеніе 16 дней,

а 80 коровъ въ 18 дней поѣли первоначальное количество травы съ луга въ 14 акровъ плюсъ приращеніе 18 дней.

Но если бы 80 коровъ поѣли то же самое количество травы, что и 84 коровы, то времени потребовалось бы во столько разъ больше 16 дней, во сколько разъ 84 больше 80, т.-е. потребовалось бы $16^4/_5$ дня. Вслѣдствіе этого можемъ написать:

80 коровъ въ 18 дней поѣли первоначальное количество травы на 14 акрахъ плюсъ приращеніе 18 дней, а

80 коровъ въ $16^4/_5$ дня поѣли первоначальное количество травы на 14 акрахъ плюсъ приращеніе 15 дней; отсюда видимъ, что въ $18-16^4/_5$ дня, т.-е. въ $1^1/_5$ дня 80 коровъ съѣдятъ траву, вновь выросшую на 14 акрахъ въ теченіе $18-16=2$ дней. Если же въ $1^1/_5$ дня онѣ съѣдаютъ приращеніе двухъ дней, то въ 18 дней они съѣдятъ приращеніе $\frac{2\,.\,5\,.\,18}{15}=30$ дней. Но раньше мы нашли, что

80 коровъ въ 18 дней поѣли первоначальное количество травы на 14 акрахъ плюсъ приращеніе 18 дней, а теперь: 80 коровъ въ 18 дней съѣдаютъ приращеніе 30 дней, слѣдовательно, перво-

начальное количество травы на 14 акрахъ равно приращенію травы 12 дней, а первоначальное количество травы на 14 акрахъ плюсъ приращеніе 12 дней равно приращенію 24 дней.

Теперь рѣшимъ слѣдующій вопросъ:

Если 80 коровъ въ 18 дней поѣли приращеніе травы 30 дней на 14 акрахъ, то сколько коровъ въ 12 дней съѣдятъ приращеніе травы 24 дней на тѣхъ же 14 акрахъ?

Пишемъ, располагая по правиламъ ариѳметики:

80 кор. — въ 18 дн. поѣли прир. 30 дней на 14 акрахъ.

x . . . . . 12 . . . . . 24 . . . . . 14 акрахъ.

Если 80 коровъ въ 18 дней поѣли приращеніе 30 дней, то, чтобы въ тѣ же 18 дней поѣсть приращеніе 24 дней, надо; $\frac{80 \cdot 24}{30} = 64$ коровы. Итакъ: 64 коровы въ 18 дней поѣдаютъ приращеніе 24 дней, а въ 12 дней то же приращеніе 24 дней поѣдятъ $64 \cdot \frac{18}{12} = 64 \cdot \frac{3}{2} = 32 \cdot 3 = 96$ коровъ.

Алгебраическое рѣшеніе задачи Ньютона слѣдующее:

Обозначимъ искомое число коровъ черезъ x; пусть y есть первоначальное количество травы на лугу въ 1 акръ и пусть, кромѣ того, на всѣхъ трехъ лугахъ трава ежедневно подростаетъ на каждомъ акрѣ на z.

Всѣ коровы на первомъ лугу съѣдятъ съ одного акра: y плюсъ приращеніе 16 дней, т.-е. $y+16z$, а на 20 акрахъ: $20(y+16z)$.

Въ одинъ же день всѣ 120 коровъ съѣдятъ: $\frac{20(y+16z)}{16}$, а 1 корова въ одинъ день съѣстъ:

$$\frac{20(y+16z)}{16 \cdot 120} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, найдемъ, что на второмъ лугу 1 корова въ 1 день съѣстъ:

$$\frac{3^1/_2(y+18z)}{20 \cdot 18} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

а на третьемъ лугу 1 корова въ 1 день съѣстъ:

$$\frac{14(y+12z)}{x \cdot 12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Такъ какъ каждая корова въ 1 день съѣдаетъ одинаково, то

$$\frac{20(y+16z)}{120\,.\,16}=\frac{3^1/_2(y+18z)}{20\,.\,18}=\frac{14(y+12z)}{x\,.\,12} \quad \ldots\ldots (4)$$

или, упрощая,

$$\frac{y+16z}{96}=\frac{7(y+18z)}{720}=\frac{7(y+12z)}{6x} \quad \ldots\ldots (5)$$

Рѣшая ур-іе:

$$\frac{y+16z}{96}=\frac{7(y+18z)}{720} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

имѣемъ: $48y=576z$ . . . . . (7)

или $y=12z$ . . . . . (8)

Подставивъ значеніе y изъ (8) въ ур-іе:

$$\frac{7(y+18z)}{720}=\frac{7(y+12z)}{6x} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

и сокращая по 7, имѣемъ:

$$\frac{12z+18z}{720}=\frac{12z+12z}{6x} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

или $$\frac{30z}{720}=\frac{24z}{6x} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

или $$\frac{z}{24}=\frac{4z}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

откуда $$x=\frac{4z\,.\,24}{z}=4\,.\,24=96.$$

Отвѣтъ: 96 коровъ.

37. Если бы торговка не смѣшивала обѣ корзины, то чтобы продавать за 4 коп. десятокъ, она должна была вынимать каждый разъ изъ одной корзины (изъ которой давала 2 яблока на 1 коп.) 4 штуки, а изъ другой (изъ которой давала 3 яблока на 1 коп.) 6 штукъ и уже полученный такимъ образомъ десятокъ должна продавать за 4 коп. Такъ какъ въ каждой корзинѣ было 30 яблокъ, то изъ корзины съ яблоками второго сорта она могла вынимать по 6 штукъ только $30:6=5$ разъ, а вынимая 5 разъ изъ корзины 1-го сорта, она вынула всего $4\,.\,5=20$ штукъ.

Слѣдовательно, оставшіеся 10 штукъ 1-го сорта она должна была продать за 4 коп., тогда какъ они стоятъ 5 (такъ какъ на 1 коп. давалось 2 яблока).

Такимъ образомъ торговка прогадываетъ 1 копейку потому, что у нея не хватаетъ второго сорта и первый сортъ покрываетъ этотъ недостатокъ, чѣмъ и обезцѣнивается общая стоимость яблокъ на 1 копейку.

Алгебра.

38. Возводя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=4 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

но

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

откуда, вставляя въ равенство (1) выраженіе корней изъ (2), имѣемъ:

$$x+2=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или

$$x=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Отвѣтъ: $x=2$.

39. Возводя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$x\sqrt{\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=4 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

но

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Слѣдовательно,

$$x\,.\,2=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или

$$x=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Отвѣтъ: $x=2$.

40. Положимъ

$$\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}}=y \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

а

$$\sqrt{2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x-\ldots}}}=z \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Возводя равенства (1) и (2) въ квадратъ, имѣемъ:

$$3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}=y^2$$

или $$3x+y=y^2$$

или $$y^2-y-3x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Также $$2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x-\ldots}}=z^2$$

или $$2x-z=z^2$$

или $$z^2+z-2x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Опредѣляя y и z изъ ур-ій (3) и (4), имѣемъ:

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+12x}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8x}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Вслѣдствіе этого данное ур-іе:

$$\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}+\sqrt{2x-\sqrt{2x\ldots}}=1$$

перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$y+z=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$\frac{1\pm\sqrt{1+12x}}{2}+\frac{-1\pm\sqrt{1+8x}}{2}=1 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

или $$\pm\sqrt{1+12x}\pm\sqrt{1+8x}=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Возводя въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+12x+2\sqrt{(1+12x)(1+8x)}+1+8x=4 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

или $$2\sqrt{(1+12x)(1+8x)}=2-20x$$

или $$\sqrt{(1+12x)(1+8x)}=1-10x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Возводимъ снова въ квадратъ; тогда

$$(1+12x)(1+8x)=1-20x+100x^2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

или $$1+8x+12x+96x^2=1-20x+100x^2 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

или $$40x-4x^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

или $$4x^2-40x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

или $$x^2-10x=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

или $$x(x-10)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

откуда $$x_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$x_2=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Отвѣтъ: $x_1=0$; $x_2=10$.

41. Преобразуемъ данное ур-іе:

$$\sqrt[-3]{146-\sqrt[0,1x]{9261}}=\frac{1}{\sqrt[3]{146-\sqrt[0,1x]{9261}}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \quad \ldots (1)$$

Отсюда $$\sqrt[3]{146-\sqrt[0,1x]{9261}}=5 \quad \ldots (2)$$

или, возводя въ кубъ,

$$146-\sqrt[0,1x]{9261}=125 \quad \ldots (3)$$

Откуда $$21=\sqrt[0,1x]{9261} \quad \ldots (4)$$

Возводя обѣ части въ степень $(0,1x)$, имѣемъ:

$$21^{0,1x}=9261 \quad \ldots (5)$$

или $$21^{0,1x}=21^3 \quad \ldots (6)$$

Откуда $$0,1x=3 \quad \ldots (7)$$

или $$x=30 \quad \ldots (8)$$

Отвѣтъ: $x=30$.

42. Перемножаемъ двучлены лѣвой части, вслѣдствіе чего, по упрощеніи, ур-іе приметъ видъ:

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+24=120 \quad \ldots (1)$$

или $$x^4+10x^3+35x^2+50x-96=0 \quad \ldots (2)$$

Далѣе представимъ себѣ членъ $10x^3$, какъ $2\,.\,x^2\,.\,5x$, тогда

$$x^4+2\,.\,x^2\,.\,5x+25x^2+10x^2+50x-96=0 \quad \ldots (3)$$

или $$(x^4+2\,.\,x^2\,.\,5x+25x^2)+10(x^2+5x)-96=0 \quad \ldots (4)$$

или $$(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)-96=0 \quad \ldots (5)$$

Обозначимъ $$x^2+5x=y \quad \ldots (6)$$

тогда ур-іе (5) приметъ видъ:

$$y^2+10y-96=0 \quad \ldots (7)$$

Откуда $$y_1=6;\quad y_2=-16 \quad \ldots (8)$$

Зная y, опредѣляемъ x изъ ур-ія (6), подставляя сперва значеніе y_1, а потомъ y_2, тогда имѣемъ:

1) $x^2+5x-6=0$ . . . . . (9)

Откуда $x_1=1;\ x_2=-6$. . . . . (10)

и 2) $x^2+5x+16=0$ . . . . . (11)

Откуда $x_3=\frac{-5+i\sqrt{39}}{2};\ x_4=\frac{-5-i\sqrt{39}}{2}$.

Отвѣтъ: $1,\ -6,\ \frac{-5\pm i\sqrt{39}}{2}$

43. Представимъ данное ур-іе

$x^4+(x-1)^4=17$ . . . . . (1)

слѣдующимъ образомъ

$[x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]^4+[x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}]^4=17$ . . . . . (2)

первый лѣвый членъ этого новаго ур-ія будетъ x^4, а второй $(x-1)^4$.

Далѣе представляемъ его такъ:

$[(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]^4+[(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}]^4=17$ . . . . . (3)

Обозначая $x-\frac{1}{2}=y$ . . . . . (4)

имѣемъ: $(y+\frac{1}{2})^4+(y-\frac{1}{2})^4=17$ . . . . . (5)

или $[(y+\frac{1}{2})^2]^2+[(y-\frac{1}{2})^2]^2=17$ . . . . . (6)

или $(y+y+\frac{1}{4})^2+(y^2-y+\frac{1}{4})^2=17$ . . . . . (7)

или

$$\left(y^4+y^2+\frac{1}{16}+2y^3+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)+\left(y^4+y^2+\frac{1}{16}-2y^3+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}\right)=17. \quad (8)$$

или, сокращая, имѣемъ:

$2y^4+2y^2+2\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{y^2}{2}=17$ . . . . . (9)

или $2y^4+3y^2+\frac{1}{8}=17$ . . . . . (10)

или $2y^4+3y^2-16^7/_8=0$ . . . . . (11)

Полагая $y^2=z$, имѣемъ:

$2z^2+3z-\frac{135}{8}=0$ . . . . . (12)

Откуда $$z=\frac{-3\pm\sqrt{9+135}}{4}=\frac{-3\pm 12}{4}$$

или $$z_1=\tfrac{9}{4};\quad z_2=-\tfrac{15}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Слѣдовательно, $$y_{1,2}=\pm\frac{3}{2};\quad y_{3,4}=\pm\frac{i\sqrt{15}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Но изъ равенства (4) имѣемъ:

$$x=y+\tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Откуда

$$x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=\frac{1+i\sqrt{15}}{2};\quad x_4=\frac{1-i\sqrt{15}}{2} \quad \ldots (16)$$

Отвѣтъ: $2,\ -1,\ \frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$.

44. Преобразуемъ данное ур-іе слѣдующимъ образомъ:

$$x^4-2x^3+x-30=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или, прибавляя и вычитая по x^2, имѣемъ:

$$x^4-2\,.\,x^2\,.\,x+x^2-x^2+x-30=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$(x^2-x)^2-(x^2-x)-30=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Пусть $x^2-x=y$, тогда

$$y^2-y-30=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

откуда имѣемъ:

$$y_1=6;\quad y_2=-5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

но $x^2-x=y$; отсюда опредѣляемъ x.

Изъ ур-ія

$$x^2-x-6=0$$

имѣемъ: $$x_1=3;\quad x_2=-2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

изъ ур-ія

$$x^2-x+5=0$$

имѣемъ: $$x=\frac{1\pm i\sqrt{19}}{2}.$$

Отвѣтъ: $3,\ -2,\ \frac{1\pm i\sqrt{19}}{2}$.

45. Представимъ данное ур-іе въ видѣ:

$$x^3-14x^2-x^2+6x+14x-6=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$(x^3-x^2)-(14x^2-14x)+(6x-6)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$x^2(x-1)-14x(x-1)+6(x-1)=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$(x-1)(x^2-14x+6)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Откуда имѣемъ 2 ур-ія:

$$x-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x^2-14x+6=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Рѣшая ихъ, находимъ:

$$x_1=1; \quad x_2=7+\sqrt{43}; \quad x_3=7-\sqrt{43}.$$

Отвѣтъ: $1,\ 7\pm\sqrt{43}$.

46. Представимъ ур-іе въ видѣ:

$$x^3-4x^2-5x^2+6x+20x-30=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

или $$x^3-5x^2-4x^2+20x+6x-30=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$x^2(x-5)-4x(x-5)+6(x-5)=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$(x-5)(x^2-4x+6)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Отсюда имѣемъ:

$$x-5=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x^2-4x+6=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Рѣшая, имѣемъ корни:

$$x_1=5; \quad x_2=2+i\sqrt{2}; \quad x_3=2-i\sqrt{2}. \quad \ldots\ldots (7)$$

Отвѣтъ: $5,\ 2\pm i\sqrt{2}$.

47. Представимъ данное ур-іе въ видѣ:

$$x^3-2x^2-3x^2+2x+6x-6=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$(x^3-3x^2)-(2x^2-6x)+(2x-6)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$x^2(x-3)-2x(x-3)+2(x-3)=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$(x-3)(x^2-2x+2)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Рѣшая ур-іе (4) какъ и предыдущія, имѣемъ:

$$x_1=3; \quad x_2=1+i; \quad x_3=1-i. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Отвѣтъ: $3,\ 1\pm i$.

48. Представимъ данное ур-іе въ видѣ:

$$(x-1)(x-3)(x-4)=72=6\,.\,4\,.\,3=(7-1)(7-3)(7-4). \quad . \quad . \quad (1)$$

Изъ равенства (1) видно, что

$$x=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Далѣе, перемножая лѣвую часть даннаго ур-ія, имѣемъ:

$$x^3-8x^2+19x-84=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Зная одинъ корень $x=7$, по теоремѣ Безу можемъ понизить степень даннаго ур-ія (3) на единицу, дѣля на $(x-7)$. Пониженное (квадратное) ур-іе даетъ корни:

$$x_2=\frac{1+i\sqrt{23}}{2}; \quad x_3=\frac{1-i\sqrt{23}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Отвѣтъ: $7, \ \frac{1\pm i\sqrt{23}}{2}$.

49. Представимъ данное ур-іе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sqrt[3]{x-1}=(x-1)-6. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Положимъ, что $\sqrt[3]{x-1}=y$, тогда $x-1=y^3$; вставляя, имѣемъ:

$$y=y^3-6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$y^3-y=6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$y(y^2-1)=y(y+1)(y-1)=6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$(y-1)y\,.\,(y+1)=1\,.\,2\,.\,3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Откуда видимъ, что лѣвые множители возрастаютъ на единицу, правые также, слѣдовательно, каждый множитель лѣвой части равенъ соотвѣтственно множителю правой. Отсюда заключаемъ, что $y=2$. Слѣдовательно, $x=y^3-1=9$. Зная одинъ корень ур-ія, легко найдемъ остальные.

Дѣйствительно ур-іе: $\sqrt[3]{x-1}=x-7$, по возвышеніи въ кубъ, даетъ:

$$x^3-21x^2+146x-342=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Если ур-іе (6) удовлетворяется при $x=9$, то оно дѣлится по теоремѣ Безу на множитель $(x-9)$, слѣдовательно, его можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x-9)(x^2-12x+38)=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Рѣшая квадратное ур-іе

$$x^2-12x+38=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

находимъ: $x_2=6+i\sqrt{3}; \ x_3=6-i\sqrt{3}$.

Отвѣтъ: $9, \ 6\pm i\sqrt{3}$.

50. Рѣшаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)=(x+1)(x)(x-1)=336=8\,.\,7\,.\,6=$$
$$=(7+1)7(7-1). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отсюда заключаемъ, что

$$x=7. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Зная одинъ корень, понижаемъ степень ур-ія:

$$x^3-x-336=0.$$

Имѣемъ: $$(x-7)(x^2+7x+48)=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отсюда имѣемъ корни:

$$x=\frac{-7\pm i\sqrt{123}}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Отвѣтъ: $7,\ \frac{-7\pm i\sqrt{123}}{2}$.

51. Преобразуемъ данное ур-іе слѣдующимъ образомъ:

$$9x^3-13x-6=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Дѣлимъ на $9x$ всѣ члены, тогда имѣемъ:

$$\frac{9x^3}{9x}-\frac{13x}{9x}-\frac{6}{9x}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$x^2-\frac{13}{9}-\frac{2}{3x}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$x^2-\frac{2}{3x}-1\frac{4}{9}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$x^2-\frac{2}{3x}-1-\frac{4}{9}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

или $$\left(x^2-\frac{4}{9}\right)-\left(\frac{2}{3x}+1\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или $$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}+x\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}\right)=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

откуда $$\left.\begin{aligned} x+\frac{2}{3}&=0\\ x-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

т.-е. $$x=-\frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

или же $$x-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

или $$x^2-\tfrac{2}{3}x-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Рѣшая, имѣемъ:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Отвѣтъ: $-\frac{2}{3}$; $\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.

52. Имѣемъ:

$$6x^5-6-41x^4+41x+97x^3-97x^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или $$6(x^5-1)-41x(x^3-1)+97x^2(x-1)=0. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

или $$(x-1)[6(x^4+x^3+x^2+x+1)-41x(x^2+x+1)+97x^2]=0. \quad (3)$$

Слѣдовательно, или

$$x-1=0, \text{ т.-е. } x_1=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или же $$6(x^4+x^3+x^2+x+1)-41x(x^2+x+1)+97x^2=0 \quad \ldots \quad (5)$$

Ур-іе (5) послѣ преобразованія принимаетъ видъ;

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или $$6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$6x^2+\frac{6}{x^2}-35x-\frac{35}{x}+62=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или $$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Полагая $x+\frac{1}{x}=y$, имѣемъ;

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$$

послѣ чего ур-іе (9) получаетъ видъ:

$$6y^2-12-35y+62=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

или $$6y^2-35y+50=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Откуда $$y_1=\tfrac{10}{3}; \quad y_2=\tfrac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Зная y, опредѣляемъ x изъ ур-ія

$$x+\frac{1}{x}=y. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Имѣемъ при $y=\frac{10}{3}$:

$$x_2=3;\quad x_3=\frac{1}{3}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(14)$$

при $y=\frac{5}{2}$ получаемъ:

$$x_4=2;\quad x_5=\frac{1}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(15)$$

Отвѣтъ: $1;\ 2;\ 3;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}$.

53. Имѣемъ:

$$x^6+x^3-3x^5-3x^2-40x^4-40x=0\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

или $$x^3(x^3+1)-3x^2(x^3+1)-40x(x^3+1)=0\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

или $$(x^3+1)(x^3-3x^2-40x)=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Откуда $$x^3+1=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

$$x=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

$$x^2-3x-40=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

Рѣшаемъ ур-іе (4), разлагая на множителей:

$$(x+1)(x^2-x+1)=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

Отсюда имѣемъ 3 корня:

$$x_1=-1;\quad x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\quad x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Рѣшая ур-іе (6), имѣемъ:

$$x_5=8;\ x_6=-5.$$

Отвѣтъ: $8;\ 5;\ o;\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

54. Дѣлимъ ур-іе на x^3; имѣемъ:

$$4x^3-24x^2+57x-73+\frac{57}{x}-\frac{24}{x^2}+\frac{4}{x^3}=0\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

или $$4\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-24\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+57\left(x+\frac{1}{x}\right)-73=0\quad\ldots\quad(2)$$

Пусть $$x+\frac{1}{x}=y\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

тогда $$x^2+\frac{1}{x^2}=y-2\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

и $$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3+3x+\frac{3}{x}=y^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

или, принимая во вниманіе равенство (3), имѣемъ:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3+3y\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

Такимъ образомъ ур-іе (2) перепишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$4(y^3+3y)-24(y^2-2)+57y-73=0 \quad \ldots\ldots (7)$$

или $$4y^3-24y^2+45y-25=0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

или, преобразуя,

$$4y^3-20y^2-4y^2+25y+20y-25=0 \quad \ldots\ldots (9)$$

или $$4y^2(y-1)-20y(y-1)+25(y-1)=0. \quad \ldots\ldots (10)$$

или $$(y-1)(4y^2-20y+25)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Откуда $y-1=0$; или $4y^2-20y+25=0 \quad \ldots\ldots (12)$

Рѣшая, имѣемъ:

$$y_1=1; \quad y_2=\tfrac{5}{2}; \quad y_3=\tfrac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Зная y, найдемъ x изъ ур-ія (3), т.-е.

$$x_1=2; \quad x_2=\frac{1}{2}; \quad x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \quad x_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}. \quad \ldots (13)$$

Два послѣднихъ рѣшенія x_5 и x_6 соотвѣтствуютъ x_1 и x_2, такъ какъ $y_2=y_4$.

Отвѣтъ: $2; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

55. Прибавимъ и вычтемъ въ лѣвой части по x, тогда:

$$x^2-x-2+x-\sqrt{x+2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$x^2-(x+2)+x-\sqrt{x+2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$[x^2-(\sqrt{x+2})^2]+(x-\sqrt{x+2})+10 \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$(x+\sqrt{x+2})(x-\sqrt{x+2})+(x-\sqrt{x+2})=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Вынося общаго множителя за скобку, имѣемъ:

$$(x-\sqrt{x+2})[x+\sqrt{x+2}+1]=0. \quad \ldots\ldots (5)$$

Откуда — или

$$x-\sqrt{x+2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

или $$x+\sqrt{x+2}+1=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Рѣшивъ ур-іе (6), имѣемъ:

$$x^2=x+2$$

или $$x^2-x-2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Откуда $$x_1=2; \quad x_2=-1.$$

Рѣшая ур іе (7), имѣемъ:

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\quad x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отвѣтъ: $2;\ -1;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

56. Имѣемъ:

$$\frac{(x+2)^2+(x-2)^2}{x^2-4}=2. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или
$$\frac{x^2+4x+4+x^2-4x+4}{x^2-4}-2=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или
$$\frac{x^2+8-2(x^2-4)}{x^2-4}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или
$$\frac{8}{x^2-3}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Ур-іе (3) можетъ равняться нулю въ двухъ случаяхъ:

1) если числитель равенъ нулю, и

2) если знаменатель равенъ безконечности.

Въ данномъ случаѣ числитель не равенъ нулю, слѣдовательно,

$$x^2-4=\infty \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Откуда
$$x=\infty \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Отвѣтъ: $x=\infty$.

57. Такъ какъ въ данномъ ур-іи x не будетъ равенъ нулю, то умножаемъ все ур-іе на x, тогда

$$x^4+4x^3+6x^2+4x=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по единицѣ получимъ:

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или
$$(x+1)^4=1 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или
$$x+1=\sqrt[4]{1} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Слѣдовательно:

1) $x+1=1$, т.-е. $x=0$.

2) $x+1=-1$, т.-е. $x=2$.

3) $x+1=i$, т.-е. $x=i-1$.

4) $x+1=-i$, т.-е. $x=-(i+1)$.

Корень $x=0$ — посторонній и не удовлетворяетъ ур-ію, остальные же всѣ принадлежатъ ему.

Отвѣтъ: $x_1=2,\ x_{2,3}=-1\pm i$.

58. Преобразуемъ ур-ія слѣдующимъ образомъ:

$$x^2-16=2-y;\quad y^2-4=4-x \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$(x+4)(x-4)=2-y;\quad (y+2)(y-2)=4-x. \quad \ldots (2)$$

Перемножаемъ оба ур-ія, тогда

$$(x+4)(x-4)(y+2)(y-2)=(2-y)(4-x)=(x-4)(y-2) \quad (3)$$

или $$(x+4)(x-4)(y+2)(y-2)-(y-2)(x-4)=0 \quad \ldots (4)$$

или, вынося за скобки,

$$(x-4)(y-2)[(x+4)(y+2)-1]=0 \quad \ldots\ldots (5)$$

Откуда — или

$$(x-4)(y-2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

или $$(x+4)(y+2)-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Изъ ур-ія (6) имѣемъ:

$$\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Отвѣтъ: $x=4;\ y=2$.

59. Преобразуемъ первое изъ данныхъ ур-ій при помощи того свойства пропорціи, по которому $\frac{a+b}{a-b}=\frac{p+q}{p-q}$, если $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$.

Преобразованіе даетъ:

$$\frac{x+y+\sqrt{x^2-y^2}}{x+y-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{9x+9y}{8y}=\frac{2(9x+9y)}{2\cdot 8y}=\frac{18x+18y}{16y}=$$

$$=\frac{9x+17y+9x+y}{9x+17y-9x-y}=\frac{(9x+17y)+(9x+y)}{(9x+17y)-(9x+y)} \quad \ldots (1)$$

Откуда $$\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{9x+17y}{9x+y} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Возведя обѣ части въ квадратъ и сокращая лѣвую дробь, имѣемъ:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{81x^2+289y^2+306xy}{81x^2+y^2+18xy} \quad \ldots\ldots (3)$$

Приводя къ общему знаменателю и производя сокращенія, имѣемъ:

$$126x^2-36xy-290y^2=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Полагая $x=ty$, имѣемъ:

$$126t^2y^2-36ty^2-290y^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

или $$126t^2-36t-290=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Откуда $$t_1=\frac{5}{3};\quad t_2=\frac{29}{21}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Слѣдовательно, $$x_1=\frac{5}{3}y;\quad x_2=\frac{29}{21}y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Второе изъ данныхъ ур-ій преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$(x^2+y)^2+x-y-2x(x^2+y)=506$$

или, прибавляя и вычитая по x^2 въ лѣвой части, имѣемъ:

$$[(x^2+y)^2-2x(x^2+y)+x^2]-x^2-y+x=506$$

или $$(x^2+y-x)^2-(x^2+y-x)=506. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Положимъ $x^2+y-x=z$, тогда

$$z^2-z-506=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Откуда $$z_1=23;\quad z_2=-22. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Далѣе рѣшаемъ ур-іе:

$$x^2+y-x=z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

вставляя вмѣсто z найденныя значенія изъ (11), а вмѣсто x выраженіе его черезъ y изъ (8). Тогда при $z=23$ и $x=\frac{5}{3}y$, имѣемъ:

$$y_1=3;\quad y_2=-\frac{69}{25},$$

а, слѣдовательно, $$x_1=5;\quad x_2=-\frac{23}{5}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

при $z=-22$ и $x=\frac{5}{3}y$ имѣемъ:

$$x=\frac{1\pm 3i\sqrt{61}}{25};\quad y=\frac{3\pm 9i\sqrt{61}}{25}. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Если для x взять значеніе $x=\frac{29}{21}y$, то, подставляя сперва $z=23$, а затѣмъ $z=22$, получимъ два значенія мнимыхъ и два ирраціональныхъ. То же будетъ и для y.

Отвѣтъ — рацональныя рѣшенія: 3, 5; $-\frac{69}{25}, -\frac{23}{5}$.

60. Умножаемъ первое ур-іе на 2, а второе на 35, тогда

$$2x^2+2xy=70;\quad 35xy-70y^2=70 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Вычтемъ одно изъ другого, тогда

$$2x^2-33xy+70y^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Пусть $x=ty$, тогда имѣемъ:

$$2t^2y^2-33ty^2+70y^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

откуда $$2t^2-33t+70=0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Рѣшая, имѣемъ:

$$t_1=14;\quad t_2=\tfrac{5}{2} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Вставляя значенія для t въ выраженіе $x=ty$, имѣемъ:

$$x_1=14y;\quad x_2=\tfrac{5}{2}y \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Послѣ этого ур-іе $x^2+xy=35$ можемъ написать:

$$(14y)^2+14y^2=35 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

или $$196y^2+14y^2=35 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

или $$210y^2=35 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

откуда $$y^2=\tfrac{35}{210}=\tfrac{7}{42}=\tfrac{1}{6} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

или $$y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{6}}=\frac{\pm\sqrt{6}}{6} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

При $$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{6};\quad x=\pm\frac{7\sqrt{6}}{3} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

При $x=\frac{5}{2}y$ уравненіе $xy-2y^2=2$ перепишется такъ:

$$\tfrac{5}{2}y^2-2y^2=2 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

или $$\tfrac{1}{2}y^2=2 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

или $$y^2=4,\ \text{т.-е.}\ y=\pm 2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Если $$y=\pm 2,$$

то $$x=\tfrac{5}{2}y=\pm 5 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Отвѣтъ: $\pm 5,\ \pm 2;\ \pm\frac{7\sqrt{6}}{6},\ \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

61. Умножимъ первое ур-іе на 33, а второе на 22 и вычтемъ второе изъ перваго, тогда

$$33x^2+66y^2-22xy-66y^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$33x^2-22xy=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$3x^2=2xy \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$x=\tfrac{2}{3}y \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Вставляя выраженіе для x въ ур-іе

$$x^2+2y^2=22 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

имѣемъ: $$\tfrac{4}{9}y^2+2y^2=22 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или $$2\tfrac{4}{9}y^2=22 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

или $$\tfrac{22}{9}y^2=22 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

откуда $$y=\pm 3 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Слѣдовательно, $$x=\tfrac{2}{3}y=\pm 2 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Отвѣтъ: $x=\pm 2$; $y=\pm 3$.

62. Дѣля первое ур-іе на знаменателей x^2 и y^2, приводимъ его къ слѣдующему виду:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=6\tfrac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Пусть $$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=z \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

тогда $$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=z^2-2 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Послѣ этого уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$z^2+z-8\tfrac{3}{4}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Откуда имѣемъ:

$$z_1=\tfrac{5}{2};\quad z_2=-\tfrac{7}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Вставляя $z_1=\frac{5}{2}$ въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или $$x^2+y^2=\tfrac{5}{2}xy \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Но $x+y=6$, слѣдовательно,

$$y=6-x \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Вставляя значеніе y въ ур-іе (7), имѣемъ:

$$x^2+(6-x)^2=\frac{5}{2}x(6-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

что, по упрощеніи, даетъ:

$$x^2-6x+8=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Откуда $$x_1=4;\ x_2=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Слѣдовательно, изъ ур-ія (8) имѣемъ:

$$y_1=2;\ y_2=4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Вставляя $z_2=-\frac{7}{2}$, имѣемъ ур-іе:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{7}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

которое, по упрощеніи, принимаетъ видъ:

$$x^2-6x-24=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Рѣшая, находимъ:

$$x=3\pm\sqrt{33} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Слѣдовательно, $$y=3\mp\sqrt{33} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Отвѣтъ: 2, 4, $3\pm\sqrt{33}$.

63. Дѣля первое ур-іе на $x+y$, имѣемъ:

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=3\tfrac{2}{3}(x^2-xy+y^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$[(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2]-xy(x^2+y^2)=3\tfrac{2}{3}(x^2+2xy+y^2-3xy) \quad (2)$$

или, вставляя $xy=2$, имѣемъ:

$$[(x^2+y^2)^2-4]-2(x^2+y^2)=3\tfrac{2}{3}[(x+y)^2-3xy] \quad \ldots \quad (3)$$

или $$[(x^2+y^2)^2-4]-2(x^2+2xy+y^2-2xy)=3\tfrac{2}{3}[(x+y)^2-6]. \quad (4)$$

или

$$[(x^2+2xy+y^2-2xy)^2-4]-2[(x+y)^2-4]=3\tfrac{2}{3}[(x+y)^2-6] \quad (5)$$

или $$\{[(x+y)^2-4]^2-4\}-2[(x+y)^2-4]=3\tfrac{2}{3}[(x+y)^2-6] \quad (6)$$

Положимъ, что

$$(x+y)^2=z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

тогда $$[(z-4)^2-4]-2(z-4)=3\tfrac{2}{3}(z-6) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

или $$z^2-8z+16-4-2z+8=\tfrac{11}{3}z-22 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

или $$z^2-13\tfrac{2}{3}z+42=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

или $$3z^2-41z+126=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Откуда $z_1=9;\ z_2=4\frac{2}{3}$ . . . . . (12)

Слѣдовательно, $(x+y)^2=9$ и $(x+y)^2=\frac{14}{3}$ . . . . . (13)

т.-е. $x+y=3$ или $x+y=\sqrt{\frac{14}{3}}$ . . . . . (14)

Рѣшая систему

$$x+y=3;\quad xy=2,$$

находимъ:
$$\left.\begin{array}{ll} x_1=1; & y_1=2 \\ x_2=2; & y_2=1 \end{array}\right\} \text{ . . . . . (15)}$$

Рѣшая систему

$$x+y=\sqrt{\frac{14}{3}};\quad xy=2,$$

находимъ:
$$\left.\begin{array}{ll} x_1=\sqrt{\frac{7}{6}}+i\sqrt{\frac{5}{6}}; & y_1=\sqrt{\frac{7}{6}}-i\sqrt{\frac{5}{6}} \\ x_2=\sqrt{\frac{7}{6}}-i\sqrt{\frac{5}{6}}; & y_2=\sqrt{\frac{7}{6}}+i\sqrt{\frac{5}{6}} \end{array}\right\} \text{ . . . . . (16)}$$

Отвѣтъ: 1, 2; $\sqrt{\frac{7}{6}}\pm i\sqrt{\frac{5}{6}}$.

64. Имѣемъ 3 ур-ія:

$$x+y=1-z \text{ . . . . . (1)}$$
$$x^2-y^2=1-z^2 \text{ . . . . . (2)}$$
$$x^3+y^3=1-z^3 \text{ . . . . . (3)}$$

Возведемъ (1) въ кубъ, тогда

$$x^3+3x^2y+3y^2x+y^3=1-3z+3z^2-z^3 \text{ . . . . . (4)}$$

или $(x^3+y^3)+3xy(x+y)=1-3z+3z^2-z^3$ . . . . . (5)

Вставляя въ ур-іе (5) значенія изъ (1) и (3), имѣемъ:

$$1-z^3+3xy(1-z)=1-z^3-3z+3z^2 \text{ . . . . . (6)}$$

или, сокращая, $3xy(1-z)=3z^2-3z=3z(z-1)$ . . . . . (7)

или $xy(1-z)=z(z-1)$ . . . . . (8)

Далѣе, возводимъ ур-іе (1) въ квадратъ, тогда

$$x^2+2xy+y^2=1-2z+z^2 \text{ . . . . . (9)}$$

или, замѣняя, $1-z^2+2xy=1+z^2-2z$ . . . . . (10)

или $2xy=2z^2-2z$ . . . . . (11)

или $xy=z^2-z$ . . . . . (12)

или $xy=z(z-1)$ . . . . . (13)

Послѣ этого ур-іе (8) принимаетъ видъ:

$$z(z-1)(1-z)=z(z-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Перенося всѣ члены въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$(z-1)\,.\,z\,.\,(1-z)-z(z-1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Вынося за скобки $z(z-1)$, получимъ:

$$z(z-1)[1-z-1]=0$$

или $$z(z-1)(-z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

откуда $$z=0;\quad z=1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Если $z=0$, то

$$x+y=1;\quad x^2+y^2=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Слѣдовательно,

или $$x=1;\quad y=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

или $$x=0;\quad y=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Если $z=1$, то

$$x+y=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Слѣдовательно, $$x=0 \quad \text{и} \quad y=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Итакъ, изъ трехъ неизвѣстныхъ x, y и z два должны равняться нулю, а третье 1.

Отвѣтъ: 0, 0, 1.

65. Изъ второго ур-ія опредѣляемъ y^2:

$$y^2=274+x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Вставляемъ въ первое ур-іе значеніе y изъ ур-ія второго

тогда $$x^3-274-x=3086$$

или $$x^3-x=3360. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Разлагаемъ: $$x(x+1)(x-1)=3360 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$(x+1)x(x-1)=2\,.\,2\,.\,2\,.\,2\,.\,3\,.\,5\,.\,7 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

или $$(x+1)x(x-1)=(2\,.\,2\,.\,2\,.\,2)(3\,.\,5)(2\,.\,7)=16\,.\,15\,.\,14\ldots \quad (5)$$

Отсюда видимъ, что

$$x=15. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Зная x, находимъ y изъ ур-ія (1):

$$y=\sqrt{274+x}=\sqrt{289}=19. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Кромѣ того, зная одинъ корень x, можемъ понизить степень ур-ія (2), откуда найдемъ 2 другія значенія x, а слѣдовательно и y.

Дѣйствительно, ур-іе (2) принимаетъ видъ:

$$(x-15)(x^2+15x+224)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Откуда
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{-15\pm i\sqrt{671}}{2} \\ y&=\sqrt{\frac{533\pm i\sqrt{671}}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Отвѣтъ раціональный: 15 и 19.

66. Рѣшая данное ур-іе относительно x, находимъ:

$$x=\frac{75-12y-15z}{8}=9-y-2z+\frac{z-4y+3}{8} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или
$$x=9-y-2z+t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ
$$t=\frac{z-4y+3}{8}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Изъ ур-ія (3) имѣемъ:

$$z=4y+8t-3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно, вставляя въ (2) выраженіе (4) имѣемъ:

$$x=9-y+t-2z=9-y+t-2(4y+8t-3) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

или
$$x=3(5-3y-5t). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Такъ какъ x, y и z суть числа положительныя, то

$$y\geqslant 1; \quad 4y+8t-3\geqslant 1; \quad 3(5-3y-5t)\geqslant 1 \quad \ldots \quad (7)$$

или
$$y\geqslant 1; \quad 4y+8t-3\geqslant 1; \quad 5-3y-5t\geqslant 1. \quad \ldots \quad (8)$$

Умноживъ первое неравенство на 3 и сложивъ его съ третьимъ, имѣемъ:

$$5-5t\geqslant 4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Откуда
$$t\leqslant \tfrac{1}{5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Умноживъ второе неравенство на 3, а третье на 4 и сложивъ ихъ, имѣемъ:

$$11+4t\geqslant 7 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Откуда
$$t\geqslant -1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Итакъ, для t имѣемъ предѣлы:

$$\tfrac{1}{5}\geqslant t\geqslant -1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Слѣдовательно, t можетъ быть или 0 или -1.

При $t=0$ неравенства (8) даютъ:

$$4y-3\geqslant 1 \text{ и } 5-3y\geqslant 1 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

или $$y\geqslant 1 \text{ и } y\leqslant \tfrac{1}{3} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Слѣдовательно, $$y=1 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Тогда изъ равенства (2) имѣемъ:

$$x=6 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

а изъ равенства (4) имѣемъ:

$$z=1 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Если $t=-1$, то неравенства (8) даютъ:

$$4y-11\geqslant 1 \text{ и } 10-3y\geqslant 1 \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

или $$y\geqslant 3 \text{ и } y\leqslant 3 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Слѣдовательно, $$y=3 \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Тогда изъ равенствъ (2) и (4) находимъ:

$$x=3 \text{ и } z=1 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Итакъ, имѣемъ 2 рѣшенія:

$$x_1=6;\ y_1=1;\ z_1=1 \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

и $$x_2=3;\ y_2=3;\ z_2=1 \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Отвѣтъ: 6, 1, 1 *или* 3, 3, 1.

67. Преобразовываемъ данное ур-іе слѣдующимъ образомъ:

$$4x^2-20=(3x+1)y \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Откуда $$y=\frac{4x^2-20}{3x+1}=\frac{4x}{3}-\frac{4}{9}-\frac{176}{9(3x+1)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

или $$9y=12x-4-\frac{176}{3x+1} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Для того, чтобы y было цѣлымъ, необходимо, чтобы 176 дѣлилось на $(3x+1)$ нацѣло. Но дѣлители числа 176 будутъ: 1, 2, 4, 11, 16, 22, 44, 88, 176. Приравнивая послѣдовательно выраженіе $(3x+1)$ каждому изъ дѣлителей числа 176, находимъ, что удовлетворять вопросу будутъ только дѣлители: 4, 16, 22 и 88. Откуда будемъ имѣть соотвѣтственно:

$$x=1,\ 5,\ 7 \text{ и } 29;\quad y=4,\ 5,\ 8 \text{ и } 38.$$

Отвѣтъ: 1, 5, 7, 29 *и* 4, 5, 8, 38.

68. Преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$3x^2-6x-24=(2x-9)y \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Откуда $$y=\frac{3x^2-6x-24}{2x-9}=\frac{3}{2}x+\frac{15}{4}+\frac{39}{4(2x-9)} \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$4y=6x+15+\frac{39}{2x-9} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Для того, чтобы y было цѣлымъ и положительнымъ, необходимо, чтобы 39 дѣлилось нацѣло на $(2x-9)$. Дѣлители же числа 39 будутъ: 1, 3, 13, 39. Приравнивая послѣдовательно выраженіе $2x-9$ каждому изъ дѣлителей числа 39, будемъ имѣть:

$$2x-9=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Откуда $x=5$, а слѣдовательно, $y=21$ . . . . . (5)

и т. д. Приравнивая, находимъ, что всѣ эти дѣлители удовлетворяютъ задачѣ.

Отвѣтъ: 5, 6, 10, 24 и 21, 16, 21, 40.

69. Рѣшаемъ, какъ и предыдущую. Имѣемъ:

$$x^2-2x+3=(2x-3)y \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Откуда $$y=\frac{x^2-2x+3}{2x-3}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{9}{4(2x-3)} \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$4y=2x-1+\frac{9}{2x-3} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Для того, чтобы y было положительнымъ и цѣлымъ, необходимо, чтобы 9 дѣлилось нацѣло на $(2x-3)$. Дѣлители же числа 9 будутъ: 1, 3 и 9. Приравнивая $(2x-3)$ послѣдовательно каждому изъ дѣлителей числа 9, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{matrix} x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=6 \\ y_1=3,\ y_2=2,\ y_3=3 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

и

Отвѣтъ: 2, 3, 6 и 3, 2, 3.

70. Пусть $y=px$; тогда данное ур-іе принимаетъ видъ:

$$(px)^x=x^{px} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или, извлекая изъ обѣихъ частей корень степени x, имѣемъ:

$$px=x^p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или, дѣля обѣ части на x,

$$p=x^{p-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Извлекаемъ изъ обѣихъ частей корень степени $(p-1)$, имѣемъ:

$$x=\sqrt[p-1]{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или $$x=p^{\frac{1}{p-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Слѣдовательно, $y=px=p\,.\,p^{\frac{1}{p-1}}=p^{\frac{1}{p-1}+1}=p^{\frac{p}{p-1}}$. . . . . (6)

Пусть $\frac{1}{p-1}=n$; тогда

$$1=np-n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

или $$np=n+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

или $$p=\frac{n+1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Вставляя вмѣсто p въ равенства (5) и (6) его значеніе изъ (9), имѣемъ окончательно:

$$x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ и } y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad \ldots\ldots (10)$$

гдѣ n какое угодно цѣлое число.

Отвѣтъ: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

71. Пусть $y=x^z$, тогда данное ур-іе приметъ видъ:

$$x^{x^z-x}=x^{x^z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда заключаемъ, что

$$x^z-x=xz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$x(x^{z-1}-1)=xz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или, сокращая на x,

$$x^{z-1}-1=z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

откуда $$x=\sqrt[z-1]{z+1}=(z+1)^{\frac{1}{z-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Давая z различныя значенія, находимъ, что цѣлыя рѣшенія будутъ только при $z=0$, $z=2$ и $z=3$, при чемъ значенія x будутъ 1, 2 или 3, а y соотвѣтственно 1, 8 и 9.

Отвѣтъ: 1, 2 и 3; 1, 8 и 9.

72. Представимъ данное ур-іе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{2^{3x}3^{2x}}{3^3}=\frac{5\,7^2}{5^2 7^{3x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Перенося множители съ неизвѣстнымъ показателемъ въ лѣвую часть, а съ извѣстными въ правую, имѣемъ:

$$\frac{2^{3x}3^{2x}7^{2x}}{5^x}=\frac{7^2 3^3}{5^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или, иначе

$$\frac{(2^3)^x(3^2)^x(7^3)^x}{5^x}=\frac{7^2 3^3}{5^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или

$$\left(\frac{2^3 3^2 7^3}{5}\right)^x=\frac{7^2 3^3}{5^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Логариѳмируя, имѣемъ:

$$x \lg\left(\frac{2^3 3^2 7^3}{5}\right)=\lg\frac{7^2 3^3}{5^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Откуда

$$x=\frac{\lg\frac{7^2 3^3}{5^2}}{\lg\frac{2^3 3^2 7^3}{5}}=\frac{\lg 7^2+\lg 3^3-\lg 5^2}{\lg 2^3+\lg 3^2+\lg 7^3-\lg 5} \quad \ldots\ldots (6)$$

или

$$x=\frac{2\lg 7+3\lg 3-2\lg 5}{3\lg 2+2\lg 3+3\lg 7-\lg 5} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Найдя по логариѳмамъ выраженіе числителя и знаменателя и дѣля ихъ другъ на друга, находимъ x.

73. Изъ ур-ія $x^x=4$ заключаемъ, что x долженъ быть кратнымъ двухъ. Положимъ, что

$$x=2m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Тогда

$$(2m)^{2m}=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или

$$2^{2m}m^{2m}=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или

$$(2^2)^m(m^2)^m=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или

$$4^m(m^2)^m=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Дѣля обѣ части на 4, имѣемъ:

$$4^{m-1}(m^2)^m=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Логариѳмируя, имѣемъ:

$$(m-1)\lg 4+2m\lg m=0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Но m число положительное, слѣдовательно, и логариѳмъ его также положителенъ. Поэтому сумма равна нулю, если

или

$$(m-1)\lg 4=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

или

$$2m\lg m=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Ур-ія (8) и (9) даютъ:

$$m=1 \quad \text{и} \quad m=0. \ldots\ldots\ldots (10)$$

Изъ которыхъ $m=1$ удовлетворяетъ ур-ію и даетъ $x=2$.

Отвѣтъ: $x=2$.

74. Дано ур-іе:

$$2^x=4x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Представимъ 2^x, какъ сумму биноміальныхъ коэффиціентовъ, тогда:

$$2^x=1+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x+1 \ldots\ldots (2)$$

Послѣ чего ур-іе (1) принимаетъ видъ:

$$1+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x+1=4x \ldots\ldots (3)$$

Перенося $4x$ въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$1+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x+1-4x=0 \ldots (4)$$

или $$1+x-2x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}-2x+x+1=0 \ldots (5)$$

или, сокращая, имѣемъ:

$$1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}-x+1=0 \ldots\ldots (6)$$

Но мы знаемъ, что 0 есть ничто иное, какъ $(1-1)^x$. Разлагая 0 въ рядъ Ньютона, имѣемъ:

$$0=1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2}+\cdots-x+1 \ldots (7)$$

Соединяя равенства (6) и (7), имѣемъ:

$$1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1.2}-x+1=1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}-\cdots-x+1 (8)$$

Изъ равенства (8) видимъ, что въ лѣвой части члены, начиная съ $\frac{x(x-1)}{1.2}$ и т. д. до члена $(-x)$ положительны, а въ правой части та же строка имѣетъ тѣ же члены, что и лѣвая часть, но знаки въ ней чередуются. Отсюда заключаемъ, что

равенство между правой и лѣвой частью возможны, если всѣ члены, начиная съ $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$, какъ съ члена, у котораго въ обѣихъ частяхъ равенства знаки различны, должны быть равны нулю, т.-е. равенство возможно, если въ строкѣ будетъ только 5 членовъ, чтобы соблюдалось чередованье знаковъ въ обѣихъ частяхъ.

Слѣдовательно, $1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}-x+1=0$ . . . . . (9)

Изъ ур-ія (9) имѣемъ:

$$x_1=4;\quad x_2=1 \text{ . . . . . } (10)$$

Отсюда видимъ, что $x=4$ удовлетворяетъ ур-ію (1), а $x=1$ не удовлетворяетъ. Итакъ, имѣемъ: $x=4$.

Отвѣтъ: $x=4$.

75. Согласно условію задачи имѣемъ:

$$A_x^y=10A_x^{y-1} \text{ . . . . . } (1)$$

или

$$x(x-1)...[x-(y-2)][x-y+1]=10x(x-1)...[x-(y-2)]. \quad (2)$$

или, сокращая на выраженіе $x(x-1)...[x-(y-2)]$, имѣемъ:

$$x-y+1=10 \text{ . . . . . } (3)$$

Второе условіе задачи

$$3C_x^y=5C_x^{y-1} \text{ . . . . . } (4)$$

даетъ: $$3\frac{x(x-1)...(x-y+1)}{1.2...y}=5\frac{x(x-1)...(x-y+2)}{1.2...(y-1)} \quad . . . (5)$$

сокращая на выраженіе

$$\frac{x(x-1)...(x-y+2)}{1.2...(y-1)},$$

получимъ: $$3\frac{(x-y+1)}{y}=5 \text{ . . . . . } (6)$$

или $$3x-8y+3=0 \text{ . . . . . } (7)$$

Откуда имѣемъ два ур-ія (3) и (6), рѣшая которые, имѣемъ корни:

$$x=15;\quad y=6 \text{ . . . . . } (8)$$

Отвѣтъ: 15, 6.

76. Имѣемъ:

$$3\sqrt{3}+\sqrt{43-24\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\sqrt{16-2\,.\,4\,.\,3\sqrt{3}+27}=$$

$$=3\sqrt{3}+\sqrt{4^2-2\,.\,4\,.\,3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2}=$$

$$=3\sqrt{3}+\sqrt{(4-3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{3}+4-3\sqrt{3}=4 \quad \ldots\ldots (1)$$

Отвѣтъ: 4.

77. Пусть:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x-\sqrt{y}. \quad \ldots (1)$$

т.-е. выбираемъ x и y такими, чтобы удовлетворялось равенство (1), иначе имѣемъ 2 ур-ія съ двумя неизвѣстными. (См. курсъ алгебры о преобразованіи радикаловъ).

Перемножая, имѣемъ:

$$\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}=x^2-y \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$\sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{49-50}=\sqrt[3]{-1}=-1=x^2-y \quad \ldots (3)$$

Возводя въ кубъ равенство $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y}$, имѣемъ:

$$\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=(x+\sqrt{y})^3 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

или $$7+5\sqrt{2}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y} \quad \ldots\ldots (5)$$

или $$7+5\sqrt{2}=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y} \quad \ldots\ldots (6)$$

Откуда заключаемъ, что необходимо должны соблюдаться равенства:

$$\left.\begin{array}{r} x^3+3xy=7 \\ \text{и} \quad (3x^2+y)\sqrt{y}=5\sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)^*)$$

Вставляя въ ур-іе $x^3+3xy=7$ значеніе y изъ ур-ія (3), имѣемъ:

$$x^3+3x(x^2+1)=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

или $$4x^3+3x=7. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Такъ какъ сумма коэффиціентовъ при неизвѣстномъ равна 7, то очевидно, что цѣлымъ корнемъ ур-ія (9) будетъ 1, т.-е. $x=1$,

*) См. теорію алгебры о преобразованіи радикала вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

тогда $y=2$, изъ ур-ія (3). Отсюда заключаемъ, что $x+\sqrt{y}$ будетъ равенъ $1+\sqrt{2}$.

Слѣдовательно

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Отвѣтъ: $1+\sqrt{2}$.

78. Обозначимъ величину даннаго выраженія черезъ x, тогда

$$x=\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Возводимъ выраженіе (1) въ кубъ, тогда

$$x^3=8+\sqrt{189}+3\sqrt[3]{(8+\sqrt{189})^2}\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}+$$

$$+3\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}\sqrt[3]{(8-\sqrt{189})^2}+8-\sqrt{189} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

или

$$x^3=16+3\sqrt[3]{(8^2-189)(8+\sqrt{189})}+3\sqrt[3]{(8^2-189)(8-\sqrt{189}} \quad . \quad (3)$$

или

$$x^3=16+3\sqrt[3]{8^2-189}\left(\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}\right) \quad . \quad (4)$$

Но выраженіе, стоящее въ скобкахъ, и есть то, что мы обозначили черезъ x, слѣдовательно,

$$x^3=16+(3\sqrt[3]{8^2-189})x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Но

$$\sqrt[3]{8^2-189}=\sqrt[3]{-125}=5. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Слѣдовательно,

$$x^3=16-15x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или

$$x^3+15x=16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Такъ какъ сумма коэффиціентовъ при неизвѣстномъ равна 16, то очевидно, что одинъ корень ур-ія будетъ 1.

Остальныя два значенія найдемъ, понизивъ степень ур-ія (8) на единицу, что можно сдѣлать, зная одинъ корень. Эти два значенія будутъ ирраціональными.

Итакъ,

$$\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}=1.$$

Отвѣтъ: 1.

79. Числитель данной дроби представляетъ частное отъ дѣленія $x^{10}-1$ на x^2-1, а знаменатель — частное отъ дѣленія x^5-1 на $x-1$, поэтому:

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}:\frac{x^5-1}{x-1}=\frac{(x^{10}-1)(x-1)}{(x^2-1)(x^5-1)}=$$

$$=\frac{[(x^5)^2-1^2](x-1)}{(x^2-1^2)(x^5-1)}=\frac{(x^5+1)(x^5-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^5-1)}=\frac{x^5+1}{x+1}=$$

$$=x^4-x^3+x^2-x+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отвѣтъ: $x^4-x^3+x^2-x+1$.

80. Извлекая изъ даннаго многочлена квадратный корень, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{r|l} \sqrt{x^4+8x^3+4x^2-49x+38}=x^2+4x-6 & \\ \mp x^4 & \\ \hline 2x^2+4x \;\big|\; 8x^3+4x^2 & \\ 4x \;\big|\; \mp 8x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline 2x^2+8x-6 \;\big|\; -12x^2-49x+38 & \\ -6 \;\big|\; \pm 12x^2 \pm 48x \mp 36 & \\ \hline -x+2. & \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Отсюда видимъ, что данный многочленъ былъ бы точнымъ квадратомъ, если бы остатокъ $(-x+2)$ былъ равенъ нулю. Этотъ остатокъ равенъ нулю при $x=2$. Откуда заключаемъ, что данный многочленъ будетъ точнымъ квадратомъ при значеніи $x=2$.

Отвѣтъ: при $x=2$.

81. Положимъ, что

$$5^x=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

отсюда заключаемъ, что x заключается между 1 и 0. Положимъ, что

$$x=\frac{1}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

тогда

$$5^{\frac{1}{x_1}}=2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или

$$5=2^{x_1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Отсюда заключаемъ, что x находится между 3 и 2, т.-е.

$$3>x_1>2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Пусть $x_1=2+\frac{1}{x_2}$, тогда

$$5=2^{2+\frac{1}{x_2}}=2^2\,.\,2^{\frac{1}{x_2}}=4\,.\,2^{\frac{1}{x_2}}$$

или $$\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2}=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Изъ равенства (6) видимъ, что

$$4>x_2>3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Слѣдовательно $$x_2=3+\frac{1}{x_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

тогда $$\left(\frac{5}{3}\right)^{3+\frac{1}{x_3}}=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

и т. д.

Итакъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{1}{x_1}&=\frac{1}{2+\frac{1}{x_2}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{x_3}}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Составляя подходящія дроби, находимъ:

$$\frac{P_1}{Q_1}=0;\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{1}{2};\quad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{3}{7} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Третья подходящая дробь отличается отъ истинной меньше, чѣмъ на $\frac{1}{72}$, а именно на $\frac{1}{49}$. Слѣдовательно, условіе задачи выполнено.

Отвѣтъ: $\lg_5 2=\frac{3}{7}$.

82. Имѣемъ:

$$\lg 125=\lg 5^3=3\lg 5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

но $$5=\frac{10}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Слѣдовательно, $$\lg 5=\lg\frac{10}{2}=\lg 10-\lg 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$\lg 10-\lg 2=1-\lg 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

но $\lg 2=m$.

Слѣдовательно:

$$\lg 125=\lg 5^3=3\lg 5=3(\lg 10-\lg 2)=3(1-\lg 2)=3(1-m) \quad . \quad (5)$$

Отвѣтъ: $\lg 125=3(1-m)$.

83. Во всякой таблицѣ логариѳмовъ на мѣстѣ логариѳма основанія стоитъ 0, указывающій мантиссу основанія, характеристика котораго всегда 1.

84. Имѣемъ:

$$4^2 > 11 > 4^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

откуда $\lg 11 = 1 +$ положительная дробь.

Отвѣтъ: 1.

85. Изъ теоріи алгебры извѣстно, что формула для общаго члена разложенія бинома Ньютона въ примѣненіи къ многочлену: $(a+b+c+\ldots+k+l)^m$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$T = \frac{1.2.3\ldots(l-1).l}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.23\ldots\gamma\ldots1.2.3\ldots\lambda} a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ α, β, $\gamma\ldots\lambda$ суть соотвѣтственно показатели членовъ a, $b\ldots l$, при чемъ сумма этихъ показателей всегда равна m, т.-е. показателю многочлена*).

Теперь напишемъ по формулѣ (1) общій членъ даннаго разложенія:

$(1+x+x^2)^3$, при чемъ $a=1$, $b=x$, $c=x^2$.

Тогда $$T = \frac{1.2.3}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\gamma} 1^\alpha x^\beta (x^2)^\gamma \quad \ldots \quad (2)$$

или $$T = \frac{6}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma} 1^\alpha x^{\beta+2\gamma} \quad \ldots \quad (3)$$

Изъ формулы (3) видимъ, что показатель при x есть $\beta+2\gamma$. Намъ же надо найти коэффиціентъ при x^4. Отсюда

$$\beta+2\gamma=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Кромѣ того мы знаемъ, что сумма показателей равна степени разложенія, т.-е.

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Слѣдовательно, имѣемъ 2 ур-ія (4) и (5) съ тремя неизвѣстными, при чемъ эти неизвѣстныя должны быть цѣлыми и положительными.

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=3\\ \beta+2\gamma&=4\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

---

*) См. алгебру «Бертрана», въ переводѣ Билибина, изд. 1885 г.

Изъ ур-ія (4) видимъ, что наибольшее возможное значеніе для γ будетъ: $\gamma=2$;

тогда $\beta=0$ и $\alpha=1$ . . . . . (7)

При $\gamma=1$ имѣемъ:

$\beta=2$ и $\alpha=0$. . . . . (8)

При $\gamma=0$ имѣемъ:

$\beta=4$ и $\alpha=-1$ . . . . . (9)

Значенія (9) не годятся, такъ какъ α отрицательно. Слѣдовательно, имѣемъ два возможныхъ значенія:

$\alpha=1;\ \beta=0;\ \gamma=2$ . . . . . (10)

или $\alpha=0;\ \beta=2;\ \gamma=1$. . . . . (11)

Подставляя въ формулу (3) общаго члена значенія изъ (10), имѣемъ:

$$T=\frac{6}{1\,.\,2\ldots\alpha\,.\,1\,.\,2\ldots\beta\,.\,1\,.\,2\ldots\gamma}1^{\alpha}x^{\beta+2\gamma}=\frac{6}{1\,.\,1\,.\,2}\cdot 1^{1}x^{4}=3x^{4},$$

такъ какъ $1\,.\,2\ldots\beta$ въ произведеніе входитъ не будетъ, въ силу того, что $\beta=0$, а слѣдовательно произведеніе $1\,.\,2\ldots0$ можно принять равной 1. (Подробнѣе см. теорію.)

Подставляя въ ту же формулу (3) значенія изъ (11), имѣемъ:

$$T=\frac{6}{1\,.\,1\,.\,2}\cdot 1^{0}x^{4}=3x^{4}\ldots$$

Слѣдовательно, всего членовъ и x^4 будетъ два одинаковыхъ. Сумма ихъ будетъ:

$$3x^4+3x^4=6x^4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Откуда видимъ, что искомый коэффиціентъ равенъ 6.

Отвѣтъ: 6.

86. Пусть $\sqrt{a^2+1}=x$. . . . . (1)

Очевидно, что x содержится между (a) и $(a+1)$, слѣдовательно,

$$x=a+\frac{1}{x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

то-есть $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x_1}$,

слѣдовательно, $x_1=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=a+\sqrt{a^2+1}$. . . . . (3)

Очевидно, что x_1 содержится между $2a$ и $2a+1$, поэтому

$$x_1=2a=\frac{1}{x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

откуда $$a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Слѣдовательно,

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=a+\sqrt{a^2+1}=x_1 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

а потому, если $x_2=x_1$, что слѣдуетъ изъ сравненія равенствъ (6) и (3), имѣемъ:

$$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+}\cdots}$$

Отвѣтъ: (a, 2a, 2a, 2a...).

87. Рѣшая данное ур-іе двойнымъ возведеніемъ въ квадратъ, имѣемъ корни $x_1=0$; $x_2=4$, не удовлетворяющіе ур-ію. Дѣйствительно, подразумѣвая лишь ариѳметическое значеніе корня, мы видимъ, что каково бы ни было x, лѣвая часть даннаго ур-ія будетъ всегда больше правой, такъ какъ $\sqrt{5+x}>\sqrt{x}$, а если къ $\sqrt{5+x}$ прибавимъ $\sqrt{5-x}$, то сумма будетъ и подавно больше $\sqrt{x}$. Подобное заключеніе будетъ правильно только въ частномъ, разбираемомъ нами случаѣ. Но если считать, какъ и необходимо, что корень четной степени имѣетъ два значенія, т.-е. 2 знака, то мы должны рѣшить вопросъ относительно ур-ія:

$$\pm\sqrt{5+x}\pm\sqrt{5-x}=\pm\sqrt{x}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такое ур-іе разбивается на $20\left[A_6^3=\frac{6.5.4}{1.2.5}\right]$ частныхъ ур-ій, которыя дадутъ при ихъ рѣшеніи одни и тѣ же корни ($x_1=0$; $x_2=4$), но не всѣ будутъ ими удовлетворяться, а полученные корни удовлетворятъ только ур-іямъ:

$$+\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=+\sqrt{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и $$-\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=-\sqrt{x}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Итакъ, если мы разсматриваемъ вопросъ относительно ур-ія, въ которомъ неизвѣстныя входятъ подъ знакъ радикала, то необходимо изслѣдовать, какому изъ возможныхъ частныхъ случаевъ эти корни удовлетворяютъ.

88. Если x измѣняется пропорціонально y и z, то зависимость x отъ этихъ величинъ выразится формулой:

$$x=myz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

при чемъ m есть коэффиціентъ пропорціональности.

Если y пропорціонально $(x+z)$, то это выразится формулой:

$$y=n(x+z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ n также коэффиціентъ пропорціональности.

Подставляя значеніе y изъ (2) въ выраженіе (1), имѣемъ:

$$x=mn(x+z)z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

По условію при $z=2$, x будетъ равенъ 2, то-есть

$$2=mn(2+2).2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Откуда $$mn=\tfrac{1}{4}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Вставляя значеніе mn изъ (5) въ формулу (3), имѣемъ:

$$x=\tfrac{1}{4}(x+z)z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Если $x=9$, то z найдемъ изъ выраженія (6), подставивъ вмѣсто x его значеніе, тогда

$$9=\tfrac{1}{4}(9+z)z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$36=9z+z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или $$z^2+9z-36=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Откуда имѣемъ:

$$z_1=3 \text{ и } z_2=-12.$$

Отвѣтъ: 3 и −12.

89. Если y пропорціонально суммѣ двухъ величинъ, при чемъ одной изъ нихъ прямо-пропорціональной неизвѣстному x, а другой обратно-пропорціональной неизвѣстному x, то эта пропорціональность выразится формулой:

$$y=mx+\frac{n}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ m и n соотвѣтствующіе коэффиціенты пропорціональности.

Если $x=1$, то, по условію, $y=4$, слѣдовательно,

$$4=m+n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

если же $x=2$, то, по условію, $y=5$, слѣдовательно,

$$5=2m+\frac{n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$10=4m+n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Рѣшая ур-ія (2) и (4), находимъ:

$$m=2,\ n=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

вслѣдствіе чего формула (1) принимаетъ видъ:

$$y=2x+\frac{2}{x}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Формула (6) и будетъ выражать искомую зависимость.

Отвѣтъ: $y=2\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

90. Данное ур-іе перепишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=1-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Возведя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} \quad (2)$$

или $$1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=1+\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}+2x. \quad (3)$$

или $$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Возводя снова обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-2(x-2)\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^4} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

или $$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-(2x-4)x+x\sqrt[3]{x} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

или $$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-2x^2+4x+x\sqrt[3]{x} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

или $$(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}+(x-1)\sqrt[3]{x}-(2x^2-4x+1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Обозначимъ $\sqrt[3]{x}$ черезъ y, тогда ур-іе (8) приметъ видъ:

$$(x-2)^2y^2+(x-1)y-(2x^2-4x+1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Умножимъ ур-іе (9) на y, тогда

$$(x-2)^2y^3+(x-1)y^2-(2x^2-4x+1)y=0 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

и $$y^3=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

слѣдовательно, $$(x-2)^2x+(x-1)y^2-(2x^2-4x+1)y=0. \quad (12)$$

Умноживъ ур-іе (9) на y^2 и замѣняя y^3 черезъ x, имѣемъ:

$$(x-2)^2xy+(x-1)x-(2x^2-4x+1)y^2=0 \quad \ldots \quad (13)$$

Итакъ, имѣемъ 3 ур-ія (9), (12) и (13). Рѣшая совмѣстно ур-ія (9) и (12) и принимая за одно неизвѣстное (y), а за

другое (y^2) и подставивъ ихъ значенія въ ур-іе (13), получимъ уравненіе:

$$x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75x^2-x+1=0 \quad (14)$$

совершенно освобожденное отъ радикаловъ.

91. Умножая ур-іе

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

на $(x+m)$, получимъ ур-іе 4-й степени:

$$x^4+(\alpha+m)x^3+(\beta+\alpha m)x^2+(\gamma+\beta m)x+\gamma m=0. \quad \ldots \quad (2)$$

Для того, чтобы ур-іе (2) было возвратнымъ, необходимо, чтобы коэффиціенты какъ при x^4 и x^0, такъ и при x^3 и x были бы равны между собой, т.-е.

$$\left.\begin{aligned}\gamma m&=1\\ \alpha+m&=\gamma+\beta m\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Откуда

$$m=\frac{1}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Такъ какъ ур-іе (1) отъ умноженія на $(x+m)$, т.-е. на $\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$ обращается въ возвратное, то, умножая это ур-іе на данный множитель, мы тѣмъ самымъ вводимъ новый корень $x=-\frac{1}{\gamma}$, а такъ какъ послѣ этого получается возвратное ур-іе, то оно, какъ таковое, должно имѣть и обратный корень, т.-е. $x=-\gamma$.

Этотъ-то корень и будетъ принадлежать данному кубичному ур-ію. Зависимость между двумя другими корнями кубичнаго ур-ія, какъ корнями принадлежащими и возвратному ур-ію (2), будетъ такова, что ихъ произведеніе равно 1, такъ какъ эти корни должны быть обратными.

Отвѣтъ: $x_1=-\gamma$; $x_2x_3=1$.

92. Обозначая искомыя количества черезъ x и y, имѣемъ:

$$x=y^2 \quad \text{и} \quad y=x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Подставимъ въ первое ур-іе значеніе $y=x^2$ изъ второго, тогда

$$x=x^4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или

$$x^4-x=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или

$$x(x^3-1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или

$$x(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Откуда имѣемъ корни:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0\\ x_2&=1\\ x_3&=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ x_4&=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Условіямъ задачи удовлетворяютъ: x_3 и x_4.

Если $x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, то $y=x^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

и обратно.

Отвѣтъ: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

93. Изъ условій задачи имѣемъ:

$$x^2=-y;\quad y^2=-x\ldots\ldots\ldots(1)$$

Подставляя значеніе $x=-y^2$ изъ второго ур-ія въ ур-іе первое, имѣемъ:

$$(-y^2)^2=-y \text{ или } y^4+y=0\ldots\ldots(2)$$

или $$y(y+1)(y^2-y+1)=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

Откуда $y_1=0;\ y_2=-1;\ y_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\ y_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\ldots(4)$

Если $y=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; то $x=-y^2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

и обратно.

Отвѣтъ: $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

94. Обозначимъ искомыя числа черезъ x и y; тогда по условію задачи:

$$x+y=xy\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

или $$y=xy-x\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

или $$y=x(y-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

или $$x=\frac{y}{y-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Такъ какъ x должно быть цѣлымъ, то дробь $\frac{y}{y-1}$ должна быть цѣлой; но 2 послѣдовательныхъ числа y и $y-1$ могутъ

дѣлиться только въ томъ случаѣ, если меньшее равно единицѣ, т.-е.

$$y-1=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Откуда $$y=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Если $y=2$, то $x=2$ изъ ур-ія (4).

Отвѣтъ: 2 и 2.

95. Пусть первая дробь будетъ $\frac{a}{b}$, а вторая $\frac{x}{y}$. Выразимъ значенія x и y черезъ значенія первой дроби. По условію задачи имѣемъ:

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ax}{by} \quad \text{или} \quad \frac{ay+bx}{by}=\frac{ax}{by} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или, отбрасывая знаменателя, имѣемъ:

$$ay+bx=ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$ax-bx=ay \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$x(a-b)=ay \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$x=\frac{ay}{a-b}=y\cdot\frac{a}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

или $$\frac{x}{y}=\frac{a}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Итакъ видъ искомыхъ двухъ дробей будетъ:

$$\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{a}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Отвѣтъ: $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{a}{a-b}$.

96. Пусть данное число будетъ $10x+y$, тогда по условію задачи имѣемъ:

$$10x+y=9y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или $$10x=8y. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Откуда $$x=\frac{8y}{10}=\frac{4}{5}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Такъ какъ x и y должны быть меньше 10 и больше или равны нулю, и кромѣ того цѣлыми, то x изъ ур-ія (3) можетъ быть цѣлымъ только при $y=5$. Слѣдовательно,

$$x=4; \quad y=5. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Отвѣтъ: 45.

97. Пусть данное число будетъ $10x+y$, тогда, по условію задачи, имѣемъ:

$$10x+y=2xy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

дѣля на $2x$, имѣемъ:

$$5+\frac{y}{2x}=y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда видимъ, что $\frac{y}{2x}$ должно быть числомъ цѣлымъ, т.-е. дѣлиться на $2x$. Положимъ, что $y=2xv$; тогда ур-іе (2) перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$5+v=2xv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или, дѣля на v, имѣемъ:

$$\frac{5}{v}+1=2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ур-іе (4) показываетъ, что $\frac{5}{v}$ должно быть цѣлымъ числомъ, т.-е. необходимо, чтобы 5 дѣлилось на v нацѣло, откуда имѣемъ:

$$v_1=1; \quad v_2=5.$$

Если $v=1$, то $x=3$ и $y=6$. . . . . (5)

если $v=5$, то $x=1$ и $y=10$ . . . . . (6)

Рѣшенія (6) не годятся, такъ какъ $y<10$. Слѣдовательно имѣемъ одно число 36.

Отвѣтъ: 36.

98. Пусть искомое число будетъ $100x+10y+z$, тогда, по условію задачи:

$$7{,}41(6)[100x+10y+z)=100z+10y+x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или $\frac{89}{12}(100x+10y+z)=100z+10y+x$. . . . . (2)

Упрощая данное ур-іе, находимъ:

$$z=8x+\frac{70}{101}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

По условію z должно быть числомъ цѣлымъ, а потому число $\frac{70y}{101}$ должно быть цѣлымъ, т.-е. необходимо, чтобы $70y$ дѣлилось на 101 нацѣло, а такъ какъ, кромѣ того, y должно быть меньше 10, то y будетъ только нуль.

Если $y=0$, то $x=1$ и $z=8$. . . . . (4)

изъ ур-ія (3), которое представится въ видѣ:

$$z=8x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Отвѣтъ: 108.

99. Пусть x и y искомыя числа, тогда, по условію задачи, имѣемъ:

$$x-y=2\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad x-y=2\frac{y}{x} \ldots\ldots\ldots (1)$$

полагая $x>y$. Если $x<y$, то ур-ія (1) перепишутся обратно, при чемъ рѣшеніе ихъ будетъ одинаково съ рѣшеніемъ ур-ій (1). Будемъ рѣшать ур-іе:

$$x-y=\frac{2x}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Изъ ур-ія (2) заключаемъ, что y не можетъ быть ни единицей, ни двумя, такъ какъ тогда бы имѣли, при $y=1$, $x-1=2x$; а при $y=2$, $x-2=x$, что невозможно.

Слѣдовательно, x должно дѣлиться нацѣло на y. Пусть $x=ty$, тогда ур-іе (2) дастъ:

$$ty-y=2t \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$y(t-1)=2t. \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

или $$y=\frac{2t}{t-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Изъ ур-ія (5) видимъ, что такъ какъ t и $t-1$ суть числа взаимно простыя, то 2 должно необходимо дѣлиться на $t-1$ для того, чтобы y было числомъ цѣлымъ; откуда и слѣдуетъ, что $t-1$ можетъ равняться или 1 или 2, т.-е.

$$t-1=1 \quad \text{или} \quad t-1=2 \ldots\ldots\ldots (6)$$

Откуда соотвѣтственно имѣемъ: или

$$t=2 \quad \text{или} \quad t=3, \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Тогда изъ ур-ія (5) имѣемъ: или

$$y=4 \quad \text{или} \quad y=3 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

а, слѣдовательно, $x=ty$ будетъ соотвѣтственно:

$$x=8 \quad \text{или} \quad x=9 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Итакъ, имѣемъ рѣшенія: (4 и 8) и (3 и 9).

Рѣшая ур-іе:

$$x-y=\frac{2y}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

и зная, что $x>y$, заключаемъ, что y не можетъ дѣлиться на x, слѣдовательно, 2 должно дѣлиться на x, откуда видимъ, что x

долженъ равняться 1 или 2. Рѣшеніе $x=1$ не годится, такъ какъ тогда y не цѣлое, а при $x=2$, $y=1$.

Отвѣтъ: 4 и 8; 3 и 9; 2 и 1.

100. По условію задачи имѣемъ:

$$100x+10y+z=5(10y+z) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или
$$100x-40y-4z=0. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или
$$25x=10y+z \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

При $x=1$ имѣемъ
$$y=2 \text{ и } z=5. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

При $x=2$—
$$x=5; \quad z=0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

При $x=3$—
$$y=7; \quad z=5 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Имѣемъ три рѣшенія: 125, 250 и 370, такъ какъ $x=4$ не удовлетворяетъ задачѣ, потому что $y=10$ и $z=0$, а y должно быть меньше 10.

Отвѣтъ: 125; 250; 375.

101. Пусть x число десятковъ, а y число единицъ искомаго двузначнаго числа, тогда, по условію задачи:

$$10x+y=(x+y)(x-y)=x^2-y^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или
$$10x+y=(y+x)(y-x)=y^2-x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Рѣшая (1) ур-іе относительно x, имѣемъ:

$$x=5\pm\sqrt{25+y^2+y} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Рѣшая (2) ур-іе относительно x, имѣемъ:

$$x=-5\pm\sqrt{25+y^2+y}. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Изъ ур-ія (3) заключаемъ, что

$$\sqrt{25+y^2+y}>5 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Слѣдовательно, ур-іе (1) не можетъ имѣть рѣшеній, соотвѣтствующихъ данному условію задачи, такъ какъ x должно быть меньше 10 и больше 0, а такихъ рѣшеній получиться не можетъ, такъ даже, при $y=10$, имѣемъ: $x=10$ или $x=0$.

Изъ ур-ія (4) заключаемъ, что для того, чтобы x было цѣлымъ и положительнымъ, необходимо, чтобы $\sqrt{25+y^2-y}$ былъ бы

точнымъ квадратомъ, при чемъ можно взять передъ корнемъ знакъ +, т.-е.

$$x=-5+\sqrt{25+y^2-y}=-5+\sqrt{25+y(y-1)}. \ldots (6)$$

Такъ какъ y можетъ быть не болѣе 9, то выраженіе $y(y-1)$ не можетъ быть болѣе $9(9-1)=9.8=72$. Поэтому подкоренное количество не можетъ быть болѣе $25+72=97$.

При $y=1$, $x=-5+5=0$. Изъ этого заключаемъ, что y должно быть болѣе единицы, т.-е. мы должны брать подкоренное число болѣе 25. Но точные квадраты между числами 97 и 25 будутъ только 36, 49, 64 и 81.

Если подкоренное число будетъ 36, то $x=1$, а y найдемъ, рѣшая ур-іе

$$25+y^2-y=36 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Рѣшая находимъ, что

$$y=\frac{1\pm\sqrt{45}}{2},$$

откуда заключаемъ, что число 36 не годится, такъ какъ y должно быть цѣлымъ и положительнымъ.

Подставляя числа 49, 64 и 81, находимъ, что годится только 81, такъ какъ только при его подстановкѣ въ ур-іе (7) получается $y=8$, т.-е. цѣлое рѣшеніе. Подставляя $y=8$ въ ур-іе (6), имѣемъ: $x=4$. Слѣдовательно, искомое число будетъ 48.

Отвѣтъ: 48.

102. Очевидно, что искомое число не будетъ однозначнымъ; оно не будетъ и двузначнымъ, такъ какъ составленное ур-іе, полагая число двузначнымъ, будетъ: $10x+y=4xy$. Рѣшая его, мы не получимъ цѣлыхъ рѣшеній. Дѣйствительно, дѣля ур-іе на $2x$, имѣемъ: $5+\frac{y}{2x}=2y$; въ силу чего заключаемъ, что $\frac{y}{2x}$ должно быть цѣлымъ числомъ, а такъ какъ $y<10$, то, чтобы $\frac{y}{2x}$ было цѣлымъ, необходимо, чтобы $y=2mx$; тогда ур-іе $5+\frac{y}{2x}=2y$ принимаетъ видъ: $5+m+4mx$. Такъ какъ m не можетъ быть болѣе 4, потому что тогда ур-іе $y=2mx$ дало бы даже при $x=1$, $y=10$, а y не можетъ быть болѣе 9, то m мо-

жетъ быть 4, 3, 2 и 1. Подставляя значенія m въ ур-іе $5+m=4mx$, видимъ, что они ему не удовлетворяютъ, слѣдовательно, цѣлыхъ значеній для этого ур-ія, а потому и для ур-ія $10x+y=4xy$ не будетъ.

Положимъ, что искомое число будетъ трехзначнымъ; тогда, по условію задачи,

$$100x+10y+z=4xyz,$$

откуда, опредѣляя x, имѣемъ:

$$4xyz-100x=10y+z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или $$4x(yz-25x)=10y+z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$x=\frac{10y+z}{4(yz-25)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Въ равенствѣ (3) знаменатель четный, слѣдовательно, для цѣлаго x необходимо, чтобы и числитель былъ четнымъ, а это возможно, если z число четное. Кромѣ того, видимъ, что $yz>25$, потому что x должно быть положительно. Но y можетъ быть не болѣе 9, слѣдовательно, $9z>25$, откуда $z>\frac{25}{9}$, т.-е. $z>2$. Слѣдовательно, z можетъ быть или 4, или 6, или 8.

При $z=4$ имѣемъ:

$$x=\frac{10y+4}{4(4y-25)}=\frac{5y+2}{2(4y-25)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Для того, чтобы x было цѣлое, необходимо, чтобы y было четное, иначе числитель равенства (4) будетъ нечетнымъ; а если онъ будетъ нечетнымъ, то при четномъ знаменателѣ для x не получится цѣлыхъ рѣшеній, кромѣ того $4y>25$, иначе x будетъ отрицательно; неравенство $4y>25$ удовлетворяется при $y>6$, а такъ какъ онъ долженъ быть четнымъ, то $y=8$. Тогда $x=3$. Откуда искомое наименьшее число будетъ 384.

Отвѣтъ: 384.

103. Пусть искомыя числа будутъ x, y и z, а данное число a, тогда, по условію задачи, имѣемъ:

$$x^2+y^2+z^2=a^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Равенство (1) будетъ удовлетворятся при условіи, если $y^2=2xz$, тогда оно принимаетъ видъ:

$$x^2+2xz+z^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$(x+z)^2=a^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$x+z=a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Тогда ур-іе $y^2=2xz$ приметъ видъ:

$$y^2=2xz=2x(a-x)=2ax-2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

такъ какъ изъ ур-ія (4) находимъ $z=a-x$.

Пусть $y=\frac{m}{n}x$, гдѣ m и n произвольныя цѣлыя числа, тогда ур-іе (5) принимаетъ видъ:

$$2ax-2x^2=\frac{m^2}{n^2}x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или $$2n^2ax-2n^2x^2=m^2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$m^2x^2+2n^2x^2=2n^2ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или, дѣля на x, т.-е. теряя корень $x=0$, имѣемъ:

$$m^2x+2n^2x=2n^2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$x(m^2+2n^2)=2n^2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

откуда $$x=\frac{2n^2a}{m^2+2n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Тогда изъ ур-ій $y=\frac{m}{n}x$ и ур-ія (4) имѣемъ:

$$y=\frac{2mna}{m^2+2n^2} \quad \text{и} \quad z=\frac{m^2a}{m^2+2n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Чтобы x, y и z были цѣлыми, необходимо число a выбрать такимъ, чтобы оно дѣлилось на m^2+2n^2. Пусть

$$m^2+2n^2=a. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

что мы можемъ написать, потому что m и n произвольныя цѣлыя числа, тогда

$$x=2n^2; \quad y=m^2 \quad \text{и} \quad z=2mn.$$

Давая числамъ m и n различныя значенія будемъ имѣть соотвѣтственно рѣшенія для x, y и z, при чемъ a будетъ все время равно m^2+2n^2.

[Такъ, если $m=2$ и $n=3$, то $a=22$, $x=18$, $y=4$ и $z=12$, и ур-іе принимаетъ видъ: $18^2+4^2+12^2=22^2=484$.]

Отвѣтъ: $2n^2$; m^2; $2mn$.

104. Положимъ, что S будетъ сумма членовъ прогрессіи, a—первый членъ, число членовъ n, и послѣдній членъ l. Тогда по условію задачи

$$S=n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Но $S=\frac{a+l}{2}\cdot n$ . . . . . (2)

Слѣдовательно $\frac{a+l}{2}\cdot n=n$ . . . . . (3)

Откуда $a+l=2$ . . . . . (4)

Отсюда видимъ, что требуемое задачей условіе выполнимо въ томъ случаѣ, если сумма крайнихъ членовъ, а слѣдовательно и равноудаленныхъ отъ обоихъ концовъ, равна двумъ.

Отвѣтъ: необходимо, чтобы $a+l=2$.

105. Пусть $(x+1)$-ый членъ первой прогрессіи равенъ $(y+1)$-му члену второй прогрессіи, тогда

$(x+1)$-ый членъ$=2+5x$ . . . . . (1)

и $(y+1)$-ый членъ$=2+3y$ . . . . . (2)

По условію задачи

$2+5x=2+3y$. . . . . (3)

или $5x=3y$ . . . . . (4)

Откуда $x=\frac{3y}{5}$. . . . . (5)

При y, равномъ 5, 10, 15 и т. д., x получаетъ соотвѣтственно значенія 3, 6, 9 и т. д.

Отсюда видимъ, что одинаковые члены будутъ въ первой прогрессіи — каждый третій, а во второй — каждый пятый.

Слѣдовательно, число всѣхъ одинаковыхъ членовъ будетъ $60:5=12$.

Отвѣтъ: 12 членовъ.

106. Пусть число прыжковъ будетъ x. Разсуждаемъ такъ: Три прыжка собаки равны семи прыжкамъ лисицы, а потому 1 прыжокъ собаки равенъ $\frac{7}{3}$ прыжковъ лисицы, а x прыжковъ собаки равны $\frac{7x}{3}$ прыжковъ лисицы. Формула $\frac{7x}{3}$ представляетъ путь, который должна проскакать собака; этотъ путь выраженъ въ прыжкахъ лисицы.

Съ другой стороны, собака дѣлаетъ 6 прыжковъ въ то время, какъ лисица дѣлаетъ 9; отсюда слѣдуетъ, что лисица сдѣлаетъ $\frac{9x}{6}$ своихъ прыжковъ въ то время, какъ собака сдѣлаетъ x своихъ прыжковъ.

А такъ какъ лисица въ началѣ находилась впереди собаки на 60 своихъ прыжковъ, то длина пути, который должна проскакать собака, будетъ: $60+\frac{9x}{6}$. Итакъ, имѣемъ ур-іе:

$$\frac{7x}{3}=60+\frac{9x}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$\frac{7}{3}x=60+\frac{3x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$14x=360+9x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$5x=360 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

откуда $$x=72. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

*Отвѣтъ: 72.**)

107. Пусть мнѣ теперь x лѣтъ, а вамъ теперь y лѣтъ. Мнѣ было столько, сколько вамъ теперь $x-y$ лѣтъ тому назадъ, а вамъ тогда было $y-(x-y)$ лѣтъ. По условію задачи

$$x=2[y-(x-y)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Вамъ будетъ x лѣтъ, т.-е. столько, сколько мнѣ теперь, черезъ $x-y$ лѣтъ, мнѣ же въ то время будетъ $x+(x-y)$.

По условію задачи

$$x+[x+(x-y)]=63 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Рѣшая ур-ія (1) и (2) совмѣстно, будемъ имѣть:

$$x=28 \quad \text{и} \quad y=21.$$

Отвѣтъ: 21 и 28.

108. Пусть x будетъ искомое число лѣтъ, прожитыхъ мальчикомъ. Тогда, по условію задачи, имѣемъ, что мальчикъ про-

---

*) Эта задача схожа съ извѣстнымъ парадоксомъ греческаго философа Зенона, основанномъ на неправильномъ разсужденіи. Свой парадоксъ онъ предложилъ въ слѣдующей формѣ: Ахиллесъ быстрѣе черепахи въ 10 разъ и находится позади нея на разстояніи нѣкоторой единицы. Когда Ахиллесъ пройдетъ эту единицу, то черепаха подвинется впередъ на $\frac{1}{10}$ этой единицы; когда онъ пройдетъ и эту $\frac{1}{10}$, то черепаха подвинется впередъ на $\frac{1}{100}$ и т. д.

Другими словами Ахиллесъ никогда не догонитъ черепахи. Этотъ софизмъ не могъ быть опровергнутъ математически до тѣхъ поръ, пока Архимедъ не показалъ, что геометрическая прогрессія $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$ есть величина конечная и равная $\frac{10}{9}$.

жилъ: x лѣтъ, или $365x$ дней, или $52x$ недѣль (или воскресеній), или $12x$ мѣсяцевъ; слѣдовательно, мальчикъ прожилъ будничъ дней $365x-52x=313x$; кромѣ того, сутокъ всего онъ прожилъ $365x$, а мѣсяцевъ $52x$. Мать мальчика прожила столько воскресеній, сколько самъ мальчикъ прожилъ будничъ дней; слѣдовательно, мать прожила $313x$ воскресеній, т.-е. $313x\,.\,7$ дней. Отецъ прожилъ столько недѣль, сколько мальчикъ прожилъ сутокъ; слѣдовательно, отецъ прожилъ $365x$ недѣль, т.-е. $365x\,.\,7$ дней; бабушка прожила лѣтъ столько, сколько внукъ прожилъ мѣсяцевъ, т.-е. она прожила $12x$ лѣтъ, а слѣдовательно $12x\,.\,365$ дней. Поэтому мать, отецъ и бабушка прожили: $313\,.\,7x+365\,.\,7x+12\,.\,365x$ дней, т.-е. $2191x+2555x+4380x=9126x$ дней. По условію задачи это количество дней должно равняться 100 лѣтамъ съ четырьмя днями, т.-е. 36504 днямъ; итакъ,

$$9126x=36504. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда $x=4$.

Отвѣтъ: $x=4$.

109. Обозначимъ черезъ x задуманное мною число. Приписавъ къ нему 8, я цифру x перемѣстилъ на 1 разрядъ выше, слѣдовательно, получилъ число $10x+8$; прибавивъ къ результату 6, я получилъ $10x+8+6=10(x+1)+4$. (Что число x есть число однозначное слѣдуетъ изъ условій задачи.) Приписавъ снова 9, получимъ:

$$10[10(x+1)+4]+8=100(x+1)+40+9,$$

а прибавивъ 7, имѣлъ:

$$100(x+1)+49+7=100(x+1)+56.$$

Приписавъ справа 4, я получилъ:

$$10[100(x+1)+56]+4=1000(x+1)+564.$$

Раздѣливъ на 27, я имѣлъ:

$$\frac{10000(x+1)+564}{27}. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

вычеркнувъ же послѣднюю цифру, равную x, я уменьшилъ число въ 10 разъ, а потому имѣлъ:

$$\frac{\frac{1000(x+1)+564}{27}-x}{10}=\frac{1000(x+1)+564}{270}-\frac{x}{10}. \quad \ldots (2)$$

По условію задачи имѣемъ:

$$\frac{1000(x+1)+564}{270}-\frac{x}{10}=13 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Откуда имѣемъ:

$$1000(x+1)+564=27(130+x) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Что даетъ: $x=2$. *Отвѣтъ: 2.*

110. Обозначимъ черезъ x завѣщанную сумму денегъ, тогда, по условію задачи, первый сынъ получилъ:

$$1000+\frac{x-1000}{8};$$

на долю остальныхъ сыновей, слѣдовательно, осталось:

$$x-\left(1000+\frac{x-1000}{8}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Когда второму сыну было отдано 2000 рублей, то изъ всей суммы осталось:

$$\left[x-\left(1000+\frac{x-1000}{8}\right)\right]-2000 \quad \ldots\ldots (2)$$

или, преобразуя,

$$\frac{7x-23000}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Взявъ $\frac{1}{8}$ отъ оставшейся суммы и прибавивъ 2000, получимъ долю второго сына. Она равна:

$$2000+\frac{7x-23000}{64},$$

или, преобразуя, имѣемъ:

$$\frac{7x+105000}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

По условію задачи доля перваго брата равна долѣ второго, поэтому:

$$1000+\frac{x-1000}{8}=\frac{7x+105000}{64} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

или $$64000+8x-8000=7x+105000 \quad \ldots\ldots (6)$$

или $$x=49000. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ всѣ получили поровну, а первый получилъ:

$$1000+\frac{49000-1000}{8}=7000 \text{ рублей},$$

то сыновей было: $49000:7000=7$. *Отвѣтъ: 49000 руб.; 7.*

111. Обозначаемъ количество жетоновъ черезъ x, тогда сумма, за которую былъ проданъ одинъ жетонъ, выразится черезъ $20x$ копѣекъ. Положимъ, что число купленныхъ подстаканниковъ было y, тогда за эти подстаканники всего было заплачено $200y$ копѣекъ. Послѣ этой покупки у нихъ осталась нѣкоторая сумма, которая должна быть меньше цѣны подстаканника и, кромѣ того, должна быть кратной 20, такъ какъ они получали двугривенныя, и покупая подстаканники, платили за каждый 10 двугривенныхъ; слѣдовательно, у нихъ должно остаться еще нѣсколько двугривенныхъ. Это оставшееся количество двугривенныхъ обозначимъ черезъ z; тогда вся оставшаяся сумма будетъ $20z$. Такъ какъ количество жетоновъ было x, а каждый стоилъ $2x$, то за всѣ жетоны было получено $20x^2$. По условію задачи

$$20x^2=200y+20z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или, сокращая на 20,

$$x^2=10y+z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Изъ ур-ія (2) видимъ, что правая часть должна быть точнымъ квадратомъ (она равна x^2). Кромѣ того, оставшаяся сумма $20z$ должна быть меньше цѣны подстаканника, то-есть

$$20z<200 \quad \text{или} \quad z<10. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

откуда заключаемъ, что въ выраженіи $10y+z$ количество z выражаетъ цифру единицъ числа x^2, а y число десятковъ. Такъ какъ $y<10$, то $x^2<100$; а такъ какъ x^2 число двузначное, то оно можетъ равняться одному изъ слѣдующихъ квадратовъ: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Но такъ какъ число жетоновъ было четное (двое сложились поровну), то x^2 должно быть четнымъ, слѣдовательно, можетъ быть только: 16, 36, 64. Но (y) число подстаканниковъ должно быть нечетнымъ, такъ какъ у одного изъ нихъ при дѣлежѣ было однимъ подстаканникомъ больше, слѣдовательно, цифра десятковъ искомаго числа x^2 должна быть нечетной, а потому возможны два числа 16 и 36. Въ обоихъ случаяхъ, имѣемъ: $z=6$. Слѣдовательно, оставшаяся сумма была равна: $20\,.\,6=120$ коп., которую и взяло себѣ второе лицо; а такъ какъ подстаканникъ стоилъ 2 руб., то ему надо было дополучить $200-120=80$ коп. Но такъ какъ оба лица складывались поровну, то изъ 80 копѣекъ на долю каждаго пришлось по 40 копѣекъ, которыя и долженъ дополучить съ перваго второй.

Отвѣтъ: 40 копѣекъ.

112. Обозначимъ черезъ x количество колецъ. По условію задачи число покупателей было тоже x. Слѣдовательно, всѣ x покупателей купили $x.x=x^2$ колецъ, а такъ какъ каждое кольцо стоило x рублей, то за всѣ кольца ювелиромъ было получено $x^2.x=x^3$ рублей. Пусть каждый купленный ювелиромъ браслетъ стоилъ y рублей, а оставшаяся сумма была z рублей. Тогда, по условію задачи,

$$x^3=10y+z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отсюда заключаемъ, что правая часть равенства должна быть точнымъ кубомъ (она равна x^3), а такъ какъ, кромѣ того, $y<10$ и $z<y$, то, слѣдовательно, $10y+z$ число двузначное. Напишемъ кубы, выражающіеся двузначными числами, ихъ будетъ только два: 27 и 64, соотвѣтствующіе числамъ: 3^3 и 4^3. Изъ этихъ двухъ чиселъ 27 не годится, такъ какъ $z<y$, т.-е. цифра единицъ меньше цифры десятковъ. Итакъ,

$$x^3=10y+z=64. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Откуда имѣемъ:

$$x=4; \quad y=6; \quad z=4.$$

Слѣдовательно, кольцо стоило 4 рубля, а браслетъ 6 рублей.

Отвѣтъ: 4 и 6 рублей.

113. Возьмемъ рядъ нечетныхъ чиселъ:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и возвысимъ каждое въ квадратъ, тогда соотвѣтственно имѣемъ рядъ:

$$1, 9, 25, 49, 81, 121, 169. \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Какія бы нечетныя числа мы ни брали, квадраты ихъ всегда будутъ оканчиваться или на 1, или на 5, или на 9. Поэтому три нечетныхъ числа могутъ имѣть цифрами единицъ одни изъ слѣдующихъ:

$$(1+1+1); \quad (5+5+5); \quad (9+9+9); \quad (1+5+5); \quad (1+9+9);$$
$$(5+9+9); \quad (9+1+1); \quad (9+5+5); \quad (1+5+9). \ldots \quad (3)$$

Слѣдовательно, суммы квадратовъ трехъ нечетныхъ чиселъ вообще могутъ оканчиваться цифрами: 1, 3, 5, 7, что видно изъ вышеприведенныхъ возможныхъ комбинацій. Отсюда заключаемъ, что суммы квадратовъ искомыхъ чиселъ могутъ быть:

$$1111; \quad 3333; \quad 5555; \quad 7777. \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если первое число x, то второе $(x+2)$ и третье $(x+4)$. По условію задачи $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=$какому-либо числу изъ ряда (4). Но

$$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=x^2+x^2+4x+4+x^2+8x+16=$$
$$=3x^2+12x+20=3(x^2+4x+4)+8=3(x+2)^2+8 \ldots (5)$$

т.-е. сумма квадратовъ трехъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ равна утроенному квадрату средняго числа плюсъ 8.

Выберемъ изъ ряда (4) такое число, которое, будучи уменьшено на 8, дѣлилось бы на 3 безъ остатка. Этому условію удовлетворяетъ только число 5555. Вычтя изъ него 8 и дѣля на 3, имѣемъ:

$$(5555-8):3=5547:3=1849. \ldots\ldots (6)$$

Извлекая изъ числа 1849 квадратный корень, находимъ:

$$\sqrt{1849}=43. \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, два другія числа будутъ: 41 и 45.

Отвѣтъ: 41, 43, 45.

114. Квадраты четныхъ чиселъ могутъ оканчиваться только цифрами: 4, 6 и 0. Этими же цифрами должны оканчиваться числа, представляющія собою суммы квадратовъ шести послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ. Если принять во вниманіе условіе задачи, то слѣдуетъ предположить въ данномъ случаѣ, что сумма квадратовъ искомыхъ шести четныхъ чиселъ можетъ быть равна или 4444 или же 6666. Обозначимъ черезъ x наименьшее изъ искомыхъ четныхъ чиселъ, тогда сумма квадратовъ всѣхъ шести чиселъ выразится:

$$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+8)^2+(x+10)^2=6x^2+60x+220.$$

По условію задачи

$$6x^2+60x+220=4444 \text{ или } 6666. \ldots\ldots (1)$$

Въ первомъ случаѣ имѣемъ: $x_1=22$, $x_2=-32$, а во второмъ цѣлыхъ рѣшеній не получается, а слѣдовательно, единственное четырехзначное число, удовлетворяющее задачѣ, есть 4444, а сами числа: 22, 24, 26, 28, 30 и 32.

Отвѣтъ: 22, 24, 26, 28, 30 и 32.

115. Пусть x, y, z и t искомыя числа. Обозначимъ черезъ a число, служащее для выполненія дѣйствій, указанныхъ въ задачѣ, тогда имѣемъ:

$$x+a=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$y-a=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$za=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$t:a=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$t+x+y+z=294. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ b есть число, выражающее результатъ данныхъ дѣйствій.

Первыя 4 ур-ія переписываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$x=b-a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$y=b+a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$z=\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$t=ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Складывая эти 4 ур-ія, имѣемъ:

$$x+y+z+t=b-a+b+a+\frac{b}{a}+ab \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

или

$$x+y+z+t=2b+ab+\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Принимая во вниманіе ур-іе (5), имѣемъ:

$$2b+ab+\frac{b}{a}=294. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Замѣтивъ, что $b=az$ изъ ур-ія (3) и $\frac{b}{a}=z$ изъ ур-ія (8), и замѣняя на z выраженія ab и $\frac{b}{a}$ въ ур-іи (12), имѣемъ:

$$2az+a^2z+z=294 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

или

$$a^2z+az+az+z=294 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

или

$$az(a+1)+z(a+1)=294. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

или

$$(a+1)(az+z)=294 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

или

$$(a+1)z(a+1)=294. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

или

$$z(a+1)^2=294 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

или, разлагая 294,

$$z\,.\,(a+1)^2=2\,.\,3\,.\,7\,.\,7=6\,.\,7^2 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Отсюда ясно, что z можетъ быть только 6 и $(a+1)$ только 7. Зная, что $z=6$ и $a=6$, находимъ изъ ур-ія (3) $b=36$; зная b и a, находимъ:

$$x=30;\quad y=42;\quad z=6;\quad t=216.$$

Отвѣтъ: 30; 42; 6; 216.

116. Данная задача сводится къ отысканію числа элементовъ x, зная, что изъ нихъ сдѣланы сочетанія по 2, и всѣхъ сочетаній получилось 66, т.-е.

$$C_x^2=66 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$\frac{x(x-1)}{1.2}=66 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$x^2-x=132 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$x^2-x-132=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

откуда $$x_1=12;\quad x_2=-11 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Годится одно рѣшеніе $x=12$.

Отвѣтъ: 12.

117. Пусть количество фунтовъ кофе, купленное первымъ было x, тогда второй купилъ $(x-1)$ фунтовъ. Пусть, далѣе, цѣна за 1 ф. кофе у перваго купца была y, а у второго z. Тогда весь кофе перваго купца стоилъ xy, а кофе второго $(x-1)z$; по условію задачи имѣемъ:

$$xy-(x-1)z=115 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Если бы первый продалъ весь свой кофе по цѣнѣ второго, онъ бы получилъ xz, а если бы второй продалъ по цѣнѣ перваго, то онъ бы получилъ $(x-1)y$. Откуда имѣемъ второе ур-іе:

$$xz=(x-1)y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Весь кофе, бывшій у обоихъ купцовъ, равнялся $x+x-1=2x-1$ фунтовъ. Если бы весь этотъ кофе второй продалъ по своей цѣнѣ, то имѣлъ бы:

$$(2x-1)z=1265 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Итакъ, имѣемъ 3 ур-ія. Изъ ур-ія (2) опредѣляемъ z, тогда

$$z=\frac{(x-1)y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

вставляя значеніе z въ ур-ія (1) и (3), имѣемъ:

$$xy-\frac{(x-1)(x-1)y}{x}=115 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и

$$\frac{(2x-1)(x-1)y}{x}=1265 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или, преобразуя ур-іе (5), имѣемъ:

$$\frac{x^2y-(x-1)^2y}{x}=\frac{y}{x}\left[x^2-(x-1)^2\right]=\frac{y}{x}(x+x-1)(x-x+1)=$$

$$=\frac{(2x-1)y}{x}=115 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Дѣля ур-іе (6) на ур-іе (7), имѣемъ:

$$\frac{(2x-1)(x-1)y\,.\,x}{x(2x-1)y}=\frac{1265}{115} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или

$$x-1=11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

откуда

$$x=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Зная x изъ ур-ія (3), находимъ:

$$z=\frac{1265}{2x-1}=\frac{1265}{23}=55 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

а изъ ур-ія (1) находимъ:

$$y=60.$$

Отвѣтъ: 55 и 60 коп.; 12 и 11 ф.

118. Съ 6-го сентября и до конца перваго года, т.-е. по 31 декабря включительно прошло: $(30-5)+31+30+31=117$ дней, такъ какъ 6-е сентября надо было считать за 1 день; съ начала 1892 года по 1-е августа того же года протекло 4 мѣсяца, по 31 дню въ каждомъ, затѣмъ февраль въ 29 дней, и 2 мѣсяца по 30 дней, всего $31\,.\,4+29+2\,.\,30=213$ дней. Пусть x будетъ число полныхъ лѣтъ, прожитыхъ дѣвицей до перваго послѣ ея рожденія високоснаго года, тогда число всѣхъ дней, прожитыхъ ею до перваго високоснаго года выразится черезъ $365x$. Считая отъ конца високоснаго года, т.-е. съ 1-го января слѣдующаго года до конца слѣдующаго високоснаго года, т.-е. до 31 декабря включительно, мы получимъ 3 года по 365 дней и одинъ годъ въ 366 дней, всего $365\,.\,3+366=1461$ день. Обо-

значимъ черезъ y число четырехлѣтій по 1461 дню въ каждомъ, тогда

$$117+213+365x+1461y=1000n \ldots\ldots (1)$$

гдѣ n — цѣлое число.

Ур-іе первое можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$330+365x+1461y=1000n \ldots\ldots (2)$$

По условію x не можетъ быть больше 4 и не можетъ быть равно 4, такъ какъ мы обозначили черезъ x число полныхъ лѣтъ до перваго високоснаго года. Слѣдовательно, x можетъ быть равно 0, 1, 2 и 3.

При $x=0$, имѣемъ:

$$330+1461y=1000n \ldots\ldots (3)$$

Рѣшая его, какъ неопредѣленное уравненіе, находимъ для y наименьшее значеніе 470, что не удовлетворяетъ задачѣ.

При $x=1$, имѣемъ:

$$330+365+1461y=1000n \ldots\ldots (4)$$

или

$$695+1461y=1000n \ldots\ldots (5)$$

Рѣшая уравненіе (5), находимъ для y значенія 5, 1005 и т. д., изъ которыхъ только 5 отвѣчаетъ вопросамъ задачи. При $y=5$, $n=8$.

При $x=2$ находимъ по предыдущему, $y=75$, $y=1075$ и т. д., т.-е. рѣшенія не отвѣчаютъ вопросамъ задачи. Слѣдовательно, имѣемъ рѣшеніе $y=5$ при $x=1$ и $n=8$. Отсюда видимъ, что мною прожито 8 тысячедневій, т.-е. 8000 дней. Такъ какъ черезъ y мы обозначили четырехлѣтія, то я прожилъ (при $x=5$) 20 лѣтъ плюсъ $x=1$, т.-е. всего 21 полный годъ и 330 дней. Слѣдовательно, я родился въ 1870 году (т.-е. 1891—21). Итакъ, имѣемъ одно рѣшеніе: я родился 6 сентября 1870 года.

Отвѣтъ: 6 сентября 1870 года.

119. Обозначимъ двѣ послѣднія цифры года, въ который я родился, черезъ x и y. Тогда мнѣ лѣтъ: $10x+y$. Если мнѣ больше шести лѣтъ, то я родился въ XIX вѣкѣ и мой годъ рожденія можно обозначить черезъ $1800+10x+y$; такъ какъ мнѣ

въ 1906 году было $10x+y$ лѣтъ, то, вычтя изъ 1906 годъ моего рожденья, будемъ имѣть мой возрастъ, т.-е.

$$1906-(1800+10x+y)=10x+y \quad \ldots\ldots (1)$$

или $$1906-1800-10x-y=10x+y \quad \ldots\ldots (2)$$

или $$106=2(10x+y) \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$10x+y=\frac{106}{2}=53 \quad \ldots\ldots (4)$$

Отсюда заключаемъ, что $x=5$, $y=3$, т.-е. мнѣ 53 года.

Предположеніе, что я родился послѣ 1900 года, даетъ отвѣтъ: 3 года.

Отвѣтъ: 53 года.

120. Пусть часы показывали $(x+1)$-ый часъ и были переведены на $(y+1)$-ый часъ и пусть $x>y$.

До 12 часовъ часовыхъ ударовъ было услышано:

$$(x+1)+(x+2)+\cdots+12 \quad \ldots\ldots (1)$$

Строка первая есть ариѳметическая прогрессія, сумма ея равна

$$S=\frac{[(x+1)+12](12-x)}{2}=\frac{(x+13)(12-x)}{2} \quad \ldots (2)$$

Послѣ 12 часовъ было услышано ударовъ (часовыхъ):

$$1+2+3+\cdots+y \quad \ldots\ldots (3)$$

Сумма всѣхъ членовъ прогрессіи (3) равна

$$S=\frac{(y+1)y}{2} \quad \ldots\ldots (4)$$

До 12 часовъ было услышано получасовыхъ ударовъ

$$12-x \text{ или } 11-x \quad \ldots\ldots (5)$$

смотря по тому, показывали ли часы вначалѣ соотвѣтственно менѣе или болѣе половины $(x+1)$ часа; послѣ 12 часовъ получасовыхъ ударовъ было

$$y \text{ или } y+1 \quad \ldots\ldots (6)$$

смотря по тому, показывали ли часы послѣ ихъ перевода менѣе или болѣе половины $(y+1)$-го часа.

Итакъ, всего часовыхъ ударовъ было услышано:

$$\frac{(x+13)(12-x)}{2}+\frac{(y+1)y}{2}=\frac{(x+13)(12-x)+y^2+y}{2} \quad . \quad (7)$$

или $$\frac{y^2+y-x^2-x+156}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Получасовыхъ же ударовъ было услышано:

$$(12-x)+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

или $$(12-x)+(y+1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

или $$(11-x)+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

или $$(11-x)+(y+1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

что, по упрощеніи, даетъ:

$$12-x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$13-x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$11-x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$12-x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Такъ какъ выраженія (13) и (16) одинаковы, то имѣемъ 3 случая.

Всего могло быть услышано ударовъ:

1) $$\frac{y^2+y-x^2-x+156}{2}+12-x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

или, по упрощеніи, $$\frac{y^2+3y-x^2-3x+180}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

или 2) $$\frac{y^2+3y-x^2-3x+182}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

или 3) $$\frac{y^2+3y-x^2-3x+178}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Во всѣхъ трехъ случаяхъ число ударовъ должно быть равно 20. Слѣдовательно, имѣемъ:

1) $$\frac{y^2-x^2+3y-3x+180}{2}=20$$

или $$y^2-x^2+3y-3x=-140$$

или $$x^2-y^2+3x-3y=140$$

или $$(x+y)(x-y)+3(x-y)=140$$

или $$(x-y)(x+y+3)=140 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Такимъ же образомъ:

$$2)\ (x-y)(x+y+3)=142 \ldots\ldots\ldots (22)$$

$$\text{и } 3)\ (x-y)(x+y+3)=138 \ldots\ldots\ldots (23)$$

Такъ какъ каждое изъ ур-ій (21), (22) и (23) надо рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, то рѣшаемъ ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$(x-y)(x+y+3)=140 \ldots\ldots\ldots (21)$$

Разсматриваемъ произведеніе лѣвыхъ множителей и раскладываемъ правое число на 2 множителя, тогда

$$(x-y)(x+y+3)=1\,.\,140=2\,.\,70=4\,.\,35=5\,.\,28=7\,.\,20=10\,.\,14 \quad (24)$$

Такъ какъ множитель $(x-y)$ меньше множителя $(x+y+3)$, то разлагаемъ такъ, чтобы первый множитель былъ менѣе второго. Вслѣдствіе этого имѣемъ слѣдующія системы ур-ій:

$$x-y=1;\quad x+y+3=140 \ldots\ldots\ldots (25)$$

$$x-y=2;\quad x+y+3=70 \ldots\ldots\ldots (26)$$

$$x-y=4;\quad x+y+3=35 \ldots\ldots\ldots (27)$$

$$x-y=5;\quad x+y+3=28 \ldots\ldots\ldots (28)$$

$$x-y=7;\quad x+y+3=20 \ldots\ldots\ldots (29)$$

$$x-y=10;\quad x+y+3=14 \ldots\ldots\ldots (30)$$

Рѣшая каждую систему отдѣльно находимъ цѣлыя рѣшенія:

$x=69$, $y=68$ (изъ сист. 25); $x=18$; $y=14$ (изъ 27),

$x=15$; $y=10$ (изъ 28); $x=14$; $y=7$ (изъ 29).

При этомъ ни одно рѣшеніе не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ $x<12$.

Рѣшая такимъ же образомъ ур-іе (22) и (23) также не находимъ соотвѣтствующихъ рѣшеній.

Слѣдовательно, предположеніе что $x>y$ не соотвѣтствуетъ задачѣ. Положимъ $x<y$.

Разсуждая по предыдущему, имѣемъ:

Часовыхъ ударовъ было услышано

$$(x+1)+(x+2)+\cdots+y=\frac{(y-x)(x+y+1)}{2} \ldots (30)$$

получасовыхъ ударовъ было услышано

$$y-x+1 \quad \text{или} \quad y-x-1 \quad \text{или} \quad y-x \ldots . (31)$$

Составляя по предыдущему ур-ія, имѣемъ 3 случая:

$$1)\ (y-x)(x+y+3)=38 \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$2)\ (y-x)(x+y+3)=42 \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$3)\ (y-x)(x+y+3)=40 \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Рѣшая ур-іе (32) по предыдущему, мы изъ частнаго ур-ія:

$$(y-x)(x+y+3)=2\,.\,19$$

имѣемъ систему:

$$y-x=2;\quad x+y=16,$$

дающую корни

$$x=7,\ y=9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Другія значенія ур-ія (32) не годятся для задачи.

Изъ ур-ія (33) имѣемъ:

$$x=8;\quad y=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

$$x=4;\quad y=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Ур-іе (34) не даетъ удовлетворяющихъ задачѣ рѣшеній.

Итакъ, имѣемъ 3 рѣшенія:

$$\left.\begin{array}{ll} x=7; & y=9 \\ x=8; & y=10 \\ x=4; & y=7 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

Отсюда заключаемъ, что

1) Часы показывали 8-ой часъ до перевода и десятый послѣ перевода.

2) Часы показывали 9-ый часъ до перевода и 11-ый послѣ перевода.

3) Часы показывали 5-ый часъ до перевода и 8-ой часъ послѣ перевода.

Кромѣ того, при составленіи ур-ія (32), мы предполагали получасовыхъ ударовъ: $y-x+1$, т.-е. 3 удара (при $x=7$, $y=9$). Отсюда заключаемъ, что 3 получасовыхъ удара между промежуткомъ отъ 8-го часа до 10-го могло быть только въ томъ случаѣ, если часы показывали до перевода болѣе 7 и менѣе $7^1/_2$, а послѣ перевода болѣе $9^1/_2$, но менѣе 10. Разсуждая подобнымъ же образомъ найдемъ, что во второмъ случаѣ (гдѣ мы считали получасовыхъ ударовъ $y-x-1$) имѣемъ: часы показывали до перевода болѣе $8^1/_2$ и менѣе 8, а послѣ перевода болѣе 10 и

менѣе $10^1/_2$ (при $x=8$, $y=10$ и $y-x-1=1$); въ третьемъ же случаѣ (при $x=4$, $y=7$ и $y-x-1=2$) находимъ, что часы показывали или болѣе 4 и менѣе $4^1/_2$ до перевода и менѣе 8, но болѣе $7^1/_2$ послѣ перевода или болѣе $4^1/_2$ и менѣе 5 до перевода и менѣе $7^1/_2$, но болѣе 7 послѣ перевода.

Такимъ образомъ является уже 4 рѣшенія. Если обозначимъ черезъ A время до перевода, а черезъ B послѣ перевода, то имѣемъ таблицу:

До перевода	послѣ перевода
1) $7^1/_2>A>7$	$10>B>9^1/_2$
2) $8>A>7^1/_2$	$10^1/_2>B>10$
3) $4^1/_2>A>4$	$8>B>7^1/_2$
4) $5>A>4^1/_2$	$7^1/_2>B>7$

121. Пусть x-ый ударъ первыхъ часовъ совпадалъ съ y-ымъ ударомъ вторыхъ часовъ. Тогда до x-го удара первые часы били въ продолженіе $3(x-1)$ секундъ, а вторые часы — въ продолженіе $4(y-1)$ секундъ.

Такъ какъ первые часы отстаютъ отъ вторыхъ на 2 секунды, то, слѣдовательно,

$$4(y-1)-3(x-1)=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$4y-3x=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Рѣшая неопредѣленное ур-іе (2), имѣемъ:

$$x_1=3;\quad x_2=7;\quad x_3=11 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y_1=3;\quad y_2=6;\quad y_3=9 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ рѣшеній ур-ія (2) видимъ, что удары совпадаютъ слѣдующимъ образомъ: 3-й ударъ первыхъ часовъ съ 3-мъ ударомъ вторыхъ, 7-й съ 6-мъ, и 11-й съ 9-мъ. Откуда замѣчаемъ, что между двумя послѣдовательными совпаденіями ударовъ обоихъ часовъ первые бьютъ 3 раза, а вторые 2 раза и что совпаденій было 3. Слѣдовательно, въ дѣйствительности ударовъ было $19+3=22$, откуда видимъ, что часы показывали: $22:2=11$ часовъ.

Отвѣтъ: 11 часовъ.

122. Ходовая гиря опускается за каждый часъ на $\frac{312}{24}=13$ линій; боевая же гиря съ каждымъ ударомъ опускается на $\frac{312}{13.12}=2$ ли-

ніи*). Пусть часы пробили x ударовъ, т.-е. часы показывали x часовъ. Тогда ходовая гиря опустилась на $13x$ линій, а боевая опустилась на $(1+x)x$. Это видно изъ слѣдующихъ разсужденій: начиная съ 12 часовъ боевая гиря послѣ каждаго удара опускается на 2 линіи; всего же ударовъ было пробито:

$$1+2+3+x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Сумма членовъ этой прогрессіи равна $\frac{(1+x)}{2}x$; а такъ какъ послѣ каждаго удара гиря опускается на 2 линіи, то послѣ всѣхъ ударовъ она опустится на $\frac{(1+x)x}{2}\cdot 2$, т.-е. на $(1+x)x$ линій.

По условію задачи имѣемъ:

$$13x-(1+x)=\pm x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$13x-x-x^2=\pm x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$x^2-12x=\pm x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или, дѣля на x, $$x-12=\pm x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

откуда $$x=11 \text{ или } x=13 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Но $x=13$ не годится, такъ какъ наибольшее число часовъ равно 12.

Отвѣтъ: 11 часовъ.

123. Пусть x есть цѣна апельсина, y цѣна яблока и z цѣна груши. По условію задачи:

$$2x^2+3y^2+6z^2=173 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или $$2x^2+3(y^2+2z^2)=173 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Положимъ, что $$x^2=v \text{ и } y^2+2z^2=r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

тогда $$2v+3r=173 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Рѣшая, имѣемъ: $$v=85-3t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$r=1+2t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

или $$x^2=85-3t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$y^2+2z^2=1+2t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

---

*) Такъ какъ отъ 12 часовъ дня до 12 часовъ ночи, т.-е. въ теченіе 12 часовъ, будетъ сдѣлано ударовъ $1+2+3+\ldots+12$, т.-е. $\frac{1+12}{2}\cdot 12=13.6$ (по формулѣ прогрессіи), то въ 24 часа, т.-е. въ цѣлые сутки ударовъ будетъ вдвое больше, т.-е. $13.6.2=13.12$. Слѣдовательно, въ 1 часъ гиря опустится на $\frac{312}{13.12}=2$ линіи.

Такъ какъ x должно быть цѣлымъ, то $85-3t$ должно быть точнымъ квадратомъ цѣлаго числа; вслѣдствіе чего необходимо, чтобы $85-3t$ равнялось 4, 9, 16, 25 и т. д., т.-е. числамъ, равнымъ 2^2, 3^2, 4^2 и т. д. Приравнивая $85-3t$ каждому изъ этихъ значеній, и помня, что t должно быть цѣлымъ, будемъимѣть для t значенія: 28, 27, 23, 20, 12 и 7, соотвѣтственно чему x будетъ имѣть значенія: 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Подставляя найденныя для t значенія въ ур-іе (8), увидимъ, что оно допускаетъ цѣлыя рѣшенія при $t=20$ и при $t=28$. Соотвѣтственно этому имѣемъ:

$x=5;\ y=3;\ z=4$ (при $t=20$) . . . . . (9)

$x=1;\ y=5;\ z=4$ (при $t=28$) . . . . (10)

$x=1;\ y=7;\ z=2$ (при $t=28$) . . . . (11)

Слѣдовательно каждый десятокъ апельсиновъ, яблокъ и грушъ соотвѣтственно будетъ стоить:

1) 50; 30 и 40 коп.
2) 10; 50 и 40 коп.
3) 10; 70 и 20 коп. } . . . . . (12)

Ближе всего къ дѣйствительной стоимости стоитъ рѣшеніе:

50, 30 и 40 . . . . . (13)

Отвѣтъ: 50 30 и 40.

124. Обозначимъ искомую пробу черезъ x. По условію задачи количество мѣди въ слиткѣ составляетъ $x^0/_0$ количества чистаго золота, т.-е. на 100 частей золота приходится x частей мѣди, а на 1 часть придется $\frac{x}{100}$ частей мѣди; на x же частей золота придется $\frac{x}{100}\cdot x=\frac{x^2}{100}$ частей мѣди; слѣдовательно, всего частей въ слиткѣ будетъ x частей золота плюсъ $\frac{x^2}{100}$ частей мѣди, и все это равно 96 золотникамъ, такъ какъ такое отношеніе сплава будетъ одинаково для сколькихъ угодно золотниковъ и долей золотника.

Слѣдовательно $x+\frac{x^2}{100}=96$ . . . . . (1)

или $x^2+100x-9600=0$ . . . . . (2)

откуда $x=60$.

Второе рѣшеніе, какъ отрицательное, не годится.

Отвѣтъ: 60 пробы.

125. Пусть вагонъ трамвая въ 1 минуту проходитъ разстояніе v, а пѣшеходъ v_1 и пусть a есть разстояніе между двумя послѣдовательными вагонами трамвая, тогда, такъ какъ пѣшеходъ черезъ 4 минуты встрѣчаетъ вагонъ трамвая, то, проходя въ 1 минуту разстояніе v_1, онъ пройдетъ въ 4 минуты $4v_1$, а трамвай — $4v$; сумма пройденныхъ пѣшеходомъ и трамваемъ разстояній выразитъ намъ a, т.-е.

$$4v+4v_1=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Въ 12 минутъ пѣшеходъ пройдетъ разстояніе $12v_1$, а трамвай проѣдетъ $12v$; разность разстояній трамвая и пѣшехода дастъ намъ снова разстояніе a, т.-е.

$$12v-12v_1=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Изъ ур-ія (1) и (2) имѣемъ:

$$4v+4v_1=12v-12v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

отсюда имѣемъ: $16v_1=8v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$

что даетъ: $v=2v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$

$$v_1=\frac{v}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

т.-е. пѣшеходъ движется вдвое медленнѣе трамвая.

Пусть со станціи вышелъ одинъ вагонъ; слѣдующій долженъ выйти черезъ такой промежутокъ времени, черезъ который предыдущій пройдетъ разстояніе a; но разстояніе a пройдетъ вагонъ въ $\frac{a}{v}$ минутъ, такъ какъ въ каждую минуту онъ проходитъ разстояніе v. Слѣдовательно, вычисливъ выраженіе $\frac{a}{v}$, мы отвѣтимъ на вопросъ задачи, т.-е. найдемъ, черезъ какой промежутокъ времени выходятъ со станціи вагоны.

Вставимъ выраженіе $v_1=\frac{v}{2}$ въ ур-іе (1), тогда:

$$4v+4\frac{v}{2}=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $4v+2v=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$

или $6v=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$

откуда $\frac{a}{v}=6. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$

Слѣдовательно вагоны выходятъ черезъ 6 минутъ.

Отвѣтъ: черезъ 6 минутъ.

126. Пусть x число дней, предназначенныхъ для плаванія. Тогда весь запасъ воды на кораблѣ выразится черезъ $210x$ порцій. Въ теченіе 3 недѣль истрачено $210 . 21$ порцій (3 недѣли=21 день). Спустя 21 день благополучнаго плаванія осталось $(x-21)$ дней, а такъ какъ плаваніе продолжалось на 9 дней больше предположеннаго, то всего дней для плаванія оставалось $(x-21+9)=(x-12)$. Въ теченіе этихъ $(x-12)$ дней умирало ежедневно по три человѣка, слѣдовательно, въ первый день болѣзни было выдано 207 порцій, во второй 204, въ третій 201 и т. д.; число всѣхъ членовъ этой ариѳметической прогрессіи равно числу оставшихся дней, т.-е. равно $(x-12)$. Поэтому число порцій, израсходованныхъ въ теченіе $(x-12)$ дней болѣзни вычислится по формулѣ: $S=\frac{(a+l)}{2}\cdot n$, гдѣ $a=207$, $n=x-12$ и $l=a-(n-1)d=207-3(x-12-1)=207-3(x-13)$.

Итакъ, имѣемъ:

$$S=\frac{[207+207-3(x-13)]}{2}\cdot(x-12)=\frac{(453-3x)(x-12)}{2}. \quad (1)$$

Если къ вычисленной суммѣ прибавимъ количество израсходованныхъ порцій до болѣзни, т.-е. $210 . 21$, то сумма дастъ намъ количество всѣхъ порцій, т.-е. $210x$. Итакъ, имѣемъ:

$$210x=210 . 21+\frac{(453-3x)(x-12)}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ур-іе (2) по упрощеніи принимаетъ видъ:

$$x^2-23x-1128=0 \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad (3)$$

откуда

$$x=47. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно, плаванье продолжалось $47+9=56$ дней.

Отвѣтъ: 56 дней.

127. Пусть x есть число вещей, купленныхъ какимъ-либо изъ трехъ лицъ A, B или C, а y — число вещей, купленныхъ его женою. Тогда сумма, заплаченная мужемъ была x^2, а его женой y^2. По условію задачи имѣемъ:

$$x^2-y^2=63. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$(x+y)(x-y)=63 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Такъ какъ $63=63\,.\,1=21\,.\,3=9\,.\,7$, то ур-ію (2) можно удовлетворить, сдѣлавъ одно изъ слѣдующихъ трехъ предположеній:

$$\left.\begin{matrix} x+y=63 \\ x-y=1 \end{matrix}\right| \text{ или } \left|\begin{matrix} x+y=21 \\ x-y=3 \end{matrix}\right| \text{ или } \left|\begin{matrix} x+y=9 \\ x-y=7 \end{matrix}\right| \quad . \; . \; (3)$$

Изъ этихъ трехъ ур-ій получаемъ соотвѣтственно

$$\begin{matrix} x=32 \\ y=31 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x=12 \\ y=9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x=8 \\ y=1 \end{matrix}\left| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)\right.$$

Такъ какъ, по условію, A купилъ 23 вещами болѣе E, то онъ не могъ купить ни 12, ни 8 вещей; слѣдовательно, онъ купилъ 32 вещи. Число вещей, купленныхъ E, меньше чѣмъ у A на 23, т.-е. равно 9. Откуда вышеприведенную таблицу имѣемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{matrix} x=32(A) \\ y=31 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x=12 \\ y=9(E) \end{matrix}\right|\begin{matrix} x=8 \\ y=1 \end{matrix}\left| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)\right.$$

Далѣе, по условію, B платилъ 11 рублями дороже, чѣмъ D за каждую вещь, слѣдовательно, онъ не могъ платить 8 рублей, а потому заплатилъ всего 12 рублей. D платила на 11 рублей меньше, слѣдовательно, она платила 1 рубль*). Такимъ образомъ, таблица принимаетъ видъ:

$$\begin{matrix} x=32(A) \\ y=31 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x=12(B) \\ y=9(E) \end{matrix}\right|\begin{matrix} x=8 \\ y=1(D) \end{matrix}\left| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)\right.$$

Изъ таблицы (6) видимъ, что $x=8$ есть число вещей, купленныхъ C, а $y=31$ — число вещей, купленныхъ F.

Отвѣтъ: A и F; B и E; C и D.

128. Чтобы опредѣлить общій корень неопредѣленнаго ур-ія: $5x+4y=577$, надо положить $x=y$, откуда имѣемъ: $9x=576$, слѣдовательно, $x=y=64$. Итакъ, чистаго золота въ получившемся слиткѣ было $64\,^0/_0$. Слѣдовательно, если вмѣсто 100 частей получилось 64, то вмѣсто 25 получится $\frac{64}{4}=15$. Пусть x есть количество

*) Такъ какъ каждое лицо платило за вещь столько, сколько вещей оно купило, то безразлично, считать ли написанную таблицу выражающей число купленныхъ каждымъ вещей или выражающей сумму, заплаченную каждымъ за одну вещь.

золотниковъ, отнимаемыхъ отъ слитка. Тогда, послѣ того, какъ x золотниковъ было отнято, осталось чистаго золота $25-x$ золотниковъ; слѣдовательно, на каждый золотникъ приходилось по $\frac{25-x}{25}$ частей чистаго золота. Отнимая x золотниковъ сплава второй разъ, мы отъ $\frac{25-x}{25}$ частей чистаго золота отнимаемъ количество, равное $\frac{25-x}{25}\cdot x=\frac{25x-x^2}{25}$. Отсюда имѣемъ слѣдующее ур-іе:

$$25-x-\frac{25x-x^2}{25}=16 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

которое по упрощеніи принимаетъ видъ:

$$x^2-50x+225=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

откуда $x_1=45;\quad x_2=5.$

Такъ какъ $45>25$ золотниковъ, то соотвѣтствующее задачѣ рѣшеніе будетъ:

$$x=5.$$

Отвѣтъ: 5 золотниковъ.

129. Опредѣляемъ n. Обозначимъ цифру единицъ искомаго двузначнаго числа черезъ v, а сумму обѣихъ цифръ черезъ u, тогда цифра десятковъ будетъ $(u-v)$. По условію задачи имѣемъ:

$$u^2=10(u-v)+v=10u-9v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или $$9v=10u-u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

откуда $$v=\frac{u(10-u)}{9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что число u не болѣе 10, такъ какъ оно, будучи возведено въ квадратъ, даетъ, по условію, двузначное число, и во-вторыхъ, что одинъ изъ множителей u и $(10-u)$ долженъ быть кратнымъ 9, такъ какъ v число цѣлое. Слѣдовательно, возможно

или $$10-u=9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$u=9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Принимая во вниманіе равенство (4), имѣемъ: $u=1$, а слѣдовательно, $v=1$, что даетъ однозначное число. Изъ равенства же (5)

имѣемъ: $u=9$, слѣдовательно $v=1$, а цифра десятковъ: $9-1=8$. А, слѣдовательно, все число будетъ 81.

Зная, что $n=81$, данное ур-ie

$$\frac{\sqrt[5]{130+n+x}}{x}+\frac{\sqrt[5]{130+n+x}}{130+n}=\frac{729\sqrt[5]{x}}{13504} \quad \ldots\ldots (1)$$

преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{\sqrt[5]{211+x}}{x}+\frac{\sqrt[5]{211+x}}{211}=\frac{729\sqrt[5]{x}}{13504} \quad \ldots\ldots (2)$$

или, приводя лѣвую часть къ одному знаменателю, имѣемъ:

$$\frac{211\sqrt[5]{211+x}+x\sqrt[5]{211+x}}{211x}=\frac{729\sqrt[5]{x}}{13504} \quad \ldots\ldots (3)$$

или $$\sqrt[5]{211+x}\left(\frac{211+x}{211x}\right)=\frac{729\sqrt[5]{x}}{64\,.\,211} \quad \ldots\ldots (4)$$

или $$\sqrt[5]{(211+x)^6}=\frac{729}{64}x\sqrt[5]{x} \quad \ldots\ldots (5)$$

или $$\sqrt[5]{(211+x)^6}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\sqrt[5]{x^6} \quad \ldots\ldots (6)$$

Возводя въ 5-ю степень, имѣемъ:

$$(211+x)^6=\left(\frac{2}{3}\right)^{30}x^6 \quad \ldots\ldots (7)$$

извлекая изъ обѣихъ частей корень 6-й степени, находимъ:

$$211+x=\left(\frac{3}{2}\right)^5x \quad \ldots\ldots (8)$$

или $$\left(\frac{3}{2}\right)^5x-x=211 \quad \ldots\ldots (9)$$

или $$x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right]=211 \quad \ldots\ldots (10)$$

или $$x\left(\frac{243-32}{32}\right)=211 \quad \ldots\ldots (11)$$

откуда $$x=32 \quad \ldots\ldots (12)$$

Далѣе находимъ $z=\frac{x}{16}$; вслѣдствіе чего:

$$z=2 \quad \ldots\ldots (13)$$

Слѣдовательно, ур-іе

$$\lg_x \lg_x \lg_x y = 0$$

принимаетъ видъ:

$$\lg_2 \lg_2 \lg_2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Положимъ, что

$$\lg_2 \lg_2 y = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

тогда ур-іе (14) принимаетъ видъ:

$$\lg_2 S = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

откуда

$$S = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

такъ какъ

$$\lg_2 1 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\lg_2 \lg_2 y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Пусть

$$\lg^2 y = t,$$

тогда

$$\lg^2 t = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

откуда

$$t = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

а, слѣдовательно,

$$\lg^2 y = 2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

откуда

$$y = 2^2 = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Отвѣтъ: 4.

130. Опредѣляемъ a. Для этого найдемъ характеристику $\lg_5 3146$. Такъ какъ: $5^6 > 3146 > 5^5$, то характеристика будетъ 5; найдемъ $\lg_{0,5} 0{,}3$. Имѣемъ:

$$\lg_{\frac{5}{10}} \tfrac{3}{10} = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Слѣдовательно,

$$\left(\frac{5}{10}\right)^x = \frac{3}{10} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

откуда

$$2^x = \frac{10}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Логариѳмируя, имѣемъ:

$$x \lg 2 = \lg 10 - \lg 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x = \frac{\lg 10 - \lg 3}{\lg 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Но $\lg 10 = 1$; слѣдовательно,

$$x = \frac{1 - \lg 3}{\lg 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

По таблицамъ находимъ:

$$x=\frac{0,52288}{0,30103}=1,7371 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Слѣдовательно,

$$a=\frac{1,7371.5}{1,7371}=5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Находимъ b. Преобразуемъ данное произведеніе слѣдующимъ образомъ:

$$2^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}.8^{\frac{1}{16}}.16^{\frac{1}{32}}\ldots=2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{2}{8}}.2^{\frac{3}{16}}.2^{\frac{4}{32}}\ldots=2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots} \quad (10)$$

Пусть $$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{4}{32}+\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

Умножаемъ (11) на $\frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{3}{32}+\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

Вычитая (12) изъ (11), имѣемъ:

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

Рядъ (13) есть сумма геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $\frac{1}{2}$; вычисляя сумму по формулѣ, имѣемъ:

$$\frac{S}{2}=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

откуда $$S=1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Слѣдовательно, $$2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}=2^{s}=2^{1}=2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Итакъ, $$b=2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Находимъ c. Имѣемъ:

$$z^{\frac{1}{x}}z^{y}=z^{\frac{7}{12}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$z^{\frac{3}{x}}=z^{\frac{4}{y}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{y}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Умножая ур-іе (3) на 3, имѣемъ:

$$\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{21}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

или, замѣняя равенствомъ (4), имѣемъ:

$$\frac{4}{y}+\frac{3}{y}=\frac{21}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

или

$$\frac{7}{y}=\frac{21}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

откуда $y=4$; слѣдовательно, $x=3$. . . . . (8)

А такъ какъ $c=x+y-1$, то

$$c=6. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Находимъ d.

Общее выраженіе любого числа, написаннаго по любой системѣ счисленія есть, какъ извѣстно,

$$ax^m+bx^{m-1}+\cdots+kx+l \quad \ldots\ldots (10)$$

гдѣ a, b, c... k, l суть какія угодно цифры. По этой формулѣ можно перевести число, написанное по любой системѣ счисленія, на систему десятичную. По условію, имѣемъ:

$$4x^4+0x^3+4x^2+0x+0=16640 \quad \ldots\ldots (11)$$

то-есть

$$4x^4+4x^2-16640=0 \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

или

$$x^4+x^2-4160=0. \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Изъ ур-ія (13) находимъ:

$$x=8. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Остальные корни не годятся. Слѣдовательно,

$$d=2.8=16. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Итакъ, имѣемъ:

$$a=5;\ b=2;\ c=6 \text{ и } d=16. \quad \ldots\ldots (16)$$

Пусть количества денегъ, находящихся у каждаго лица, будутъ соотвѣтственно — x, y и z. Тогда, по условію задачи, имѣемъ:

$$x-5=2(y+5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y-2=3(z+2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$16(z-6)=x+6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=15\\ y-3z&=8\\ 16z-x&=102 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Рѣшая ихъ, имѣемъ:

$x=110$ р. 80 коп.; $y=47$ р. 90 коп.; $z=13$ р. 30 коп.

Отвѣтъ: 110 р. 80 коп.; 47 р. 90 коп.; 13 р. 30 коп.

131. Опредѣляемъ a; имѣемъ:

$$\sec^2 2x+\sec^2 x=12. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$(1+\operatorname{tg}^2 2x)+(1+\operatorname{tg}^2 x)=12. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{tg}^2 x=10. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)^2+\operatorname{tg}^2 x=10. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Раскрывая скобки и приводя къ одному знаменателю, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}^6 x-2\operatorname{tg}^4 x+5\operatorname{tg}^2 x-10=0. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

или $$\operatorname{tg}^4 x(\operatorname{tg}^2 x-2)+5(\operatorname{tg}^2 x-2)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или $$(\operatorname{tg}^2 x-2)(\operatorname{tg}^4 x+5)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Откуда $$\operatorname{tg}^2 x_1=2;\quad \operatorname{tg}^2 x_2=\sqrt{-5} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Слѣдовательно, $$a=\operatorname{tg}^2 x_1=2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Опредѣляемъ b.

Пусть $x+y=z$ и $x-y=t$; тогда, возводя въ квадратъ,

$$x^2+y^2+2xy=z^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

и $$x^2+y^2-2xy=t^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Вычитая (2) ур-іе изъ (1), имѣемъ:

$$xy=\frac{z^2-t^2}{4}. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Далѣе данныя ур-ія преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

I. $$(x+y)^2[(x^2+y^2)-xy]=76 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

или, вставляя (1),

$$(x+y)^2[z^2-2xy-xy]=76 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

или, наконецъ, замѣняя xy изъ (3) и $x+y$ черезъ z, имѣемъ:

$$z^2\left[z^2-3\cdot\frac{(z^2-t^2)}{4}\right]=76 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

и II. $$z^3=64t \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Откуда $$t=\frac{z^3}{64}. \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Подставляя значеніе t въ ур-іе (6), имѣемъ:

$$3z^8-(64)^2z^4-304\cdot(64)^2=0. \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Откуда единственное рѣшеніе:

$$z=\pm 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Слѣдовательно, $t=\pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$

а потому

$$x=\tfrac{5}{2},\quad y=\tfrac{3}{2} \quad \text{и} \quad x_1=-\tfrac{3}{2},\quad y_1=-\tfrac{5}{2} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Меньшій положительный корень есть $\frac{3}{2}$, а потому $b=3$.

Опредѣляемъ c.

Пусть искомая прогрессія будетъ:

$$a;\ aq;\ aq^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

По условію задачи

$$a+aq+aq^2=a(1+q+q^2)=1{,}39 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

и $$\lg aq^2=2(\lg 3-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Преобразуемъ (3) слѣдующимъ образомъ:

$$\lg aq^2=2\lg 3-2=\lg 3^2-2=\lg 9-\lg 100=\lg\frac{9}{100} \quad \ldots \quad (4)$$

откуда $$aq^2=\tfrac{9}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Слѣдовательно, $$a=\frac{9}{100q^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Подставляя въ ур-іе (2), имѣемъ:

$$\frac{9}{100q^2}(1+q)+\frac{9}{100}=1{,}39 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или $$9+9q+9q^2=139q^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

или $$130q^2-9q-9=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

откуда $$q=\frac{3}{10} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Другое рѣшеніе отрицательно, а потому не отвѣчаетъ задачѣ. Зная q, находимъ a, а, слѣдовательно, и c.

$$c=a=\frac{9}{100q^2}=\frac{9}{100\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{9}{9}=1 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Находимъ m.

$$m=2\sqrt{5}+\sqrt{24-8\sqrt{5}}=2\sqrt{5}+\sqrt{4-2\,.\,4\sqrt{5}+20}=$$

$$=2\sqrt{5}+\sqrt{4-2\,.\,2\,.\,2\sqrt{5}+(2\sqrt{5})}=2\sqrt{5}+\sqrt{(2-2\sqrt{5})^2}=$$

$$=2\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Находимъ n. Изъ геометріи извѣстно, что требуемымъ задачей свойствомъ обладаетъ треугольникъ, котораго основаніе

есть сторона десятиугольника, вписаннаго въ окружность, радіусъ которой равенъ боковой сторонѣ. Углы при основаніи этого треугольника равны 72°*). Слѣдовательно,

$$n=\tfrac{1}{18}\cdot 72=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Для нахожденія p рѣшимъ совмѣстно неравенства:

$$x\leqslant 9-\frac{x-2}{4}-\frac{2}{3} \quad \ldots\ldots (1) \quad \text{и} \quad \frac{12x-8}{6}-\frac{18-7x}{3}\geqslant x+2 \quad \ldots (2)$$

$12x\leqslant 108-3x+6-8$ . . . (3)	$6x-4-18+7x\geqslant 3x+6$ . . (4)
$15x\leqslant 106$ . . . . . (5)	$10x\geqslant 28$ . . . . . (6)
$x\leqslant\frac{106}{15}$ . . . . . (7)	$x\geqslant\frac{28}{10}$ . . . . . (8)
$x\leqslant 7\frac{1}{15}$ . . . . . (9)	$x\geqslant 2\frac{4}{5}$ . . . . . (10)

Итакъ, $$7\tfrac{1}{15}\geqslant x\geqslant 2\tfrac{4}{5} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Отсюда наименьшее цѣлое значеніе $x=3$. Слѣдовательно $p=3$.

Находимъ q.

Пусть $\operatorname{arc\,sn} x=y$; тогда $\operatorname{sn} y=x$ . . . . . (1)

и $$\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Слѣдовательно, наше ур-іе принимаетъ видъ:

$$y=2\operatorname{arc\,sn}\left(\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

или $$\frac{y}{2}=\operatorname{arc\,sn}\left(\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

или $$\operatorname{sn}\frac{y}{2}=\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Возводимъ въ квадратъ:

$$2\operatorname{sn}^2\frac{y}{2}=\operatorname{sn}^2 y \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Но $$2\operatorname{sn}^2\frac{y}{2}=1-\operatorname{cs} y \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, $$1-\operatorname{cs} y=\operatorname{sn}^2 y \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

или $$1-\operatorname{cs} y=1-\operatorname{cs}^2 y \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

---

*) Доказательство см. въ любой геометріи.

или $1-\mathrm{cs}\,y-1+\mathrm{cs}^2 y=0$ . . . . . (10)

или $\mathrm{cs}^2 y-\mathrm{cs}\,y=0$ . . . . . (11)

откуда $\mathrm{cs}\,y(\mathrm{cs}\,y-1)=0$ . . . . . (12)

Что даетъ: $\mathrm{cs}\,y=0$ . . . . . (13)

$\mathrm{cs}\,y=1$ . . . . . (14)

Если $\mathrm{cs}\,y=0$, то $\mathrm{sn}\,y=x=1$ . . . . . (15)

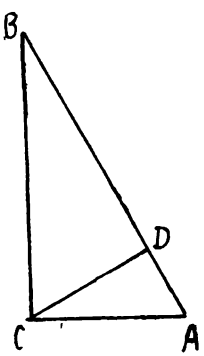
Если $\mathrm{cs}\,y=1$, то $\mathrm{sn}\,y=x=0$ . . . . . (16)

Годится корень $x=1$. Слѣдовательно,

$q=1$ . . . . . (17)

Опредѣляемъ r.

Черт. 17.



Пусть въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сторона $AC=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ и $BC=3$. Если мы на этихъ сторонахъ опишемъ окружности, какъ на діаметрахъ, то эти окружности пересѣкутся въ точкѣ D, лежащей на линіи, соединяющей точки A и B, т.-е. на гипотенузѣ AB, потому что $\angle ADC$ будетъ прямой, какъ уголъ, опирающійся на діаметръ AC, а $\angle BDC$ прямой, какъ уголъ, опирающійся на діаметръ BC. Вслѣдствіе этого линіи AD и DB составляютъ одну прямую линію AB. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADC и BDC имѣемъ:

$AD^2=AC^2-DC^2$ и $BD^2=BC^2-CD^2$ . . . . (1)

или $AD^2=\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2-DC^2$ и $BD^2=(3)^2-CD^2$ . . (2)

или $AD^2=\frac{36}{5}-DC^2$ и $BD^2=9-DC^2$ . . . . . (3)

Изъ прямоугольнаго треугольника ABC имѣемъ:

$BD:CD=CD:AD$ . . . . . (4)

или $CD^2=AD\,.\,BD$ . . . . . (5)

или, возводя въ квадратъ:

$CD^4=AD^2\,.\,BD^2$ . . . . . (6)

Вставляемъ вмѣсто AD^2 и BD^2 ихъ значенія изъ равенства (3), тогда

$CD^4=\left(\frac{36}{5}-DC^2\right)\cdot\left(9-DC^2\right)$ . . . . . (7)

откуда имѣемъ, по упрощеніи,

$$\frac{81}{5}CD^2=\frac{324}{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

или

$$r=CD=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Находимъ S=первой значущей цифрѣ $\sqrt[3]{0{,}0054}$. Для этого разбиваемъ на грани по 3 цифры въ каждой, приписавъ два нуля справа, тогда имѣемъ:

$$\sqrt[3]{0{,}0054}=\sqrt[3]{0{,}005'400} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Отсюда видимъ, что первая значущая цифра будетъ 1.

Для опредѣленія d необходимо извлечь квадратный корень изъ даннаго многочлена и остатокъ приравнять нулю. Производя дѣйствіе, находимъ остатокъ:

$$-3x+30 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

откуда

$$x=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)^*)$$

Для опредѣленія l напишемъ общій членъ разложенія бинома $(z+a)^m$.

$$T_{n+1}=C_m^n z^{m-n}a^n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}z^{m-n}a^n \quad \ldots (1)$$

Изъ сравненія этого разложенія съ даннымъ видимъ, что

$$z=\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$a=\sqrt[7]{x^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

и

$$m=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Слѣдовательно, z^{m-n} въ формулѣ (1) превратится въ слѣдующее выраженіе:

$$z^{m-n}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)^{10-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и a^n въ слѣдующее:

$$a^n=\left(\sqrt[7]{x^5}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Или, иначе,

$$z^{m-n}.a^n=\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{p-n}\left(x^{\frac{5}{7}}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

---

*) См. рѣшеніе задачи № 80.

или $$z^{m-n}.a^n=\frac{x^{\frac{5}{7}n}}{x^{\frac{4}{3}(10-n)}}=x^{\frac{5}{7}n-\frac{4}{3}(10-n)}=x^{\frac{43}{21}n-\frac{40}{3}} \quad \ldots\ldots (8)$$

По условію задачи

$$x^{\frac{43}{21}n-\frac{40}{3}}=x^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

откуда $$\frac{43}{21}n-\frac{40}{3}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

что даетъ:

$$n=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Итакъ, надо найти коэффиціентъ 8-го члена. Онъ будетъ равенъ:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}=3.8.5=120. \quad (12)$$

Слѣдовательно, $$e=\frac{3}{20}\cdot 120=18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Пусть $f=x.y$, гдѣ

$$x=20+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{2+\cdots}}} \quad \text{и} \quad y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cdots}}}}$$

$$x=20+\frac{1}{2+\frac{1}{x}} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2+\frac{1}{20+y}} \quad \ldots\ldots (15)$$

или, обращая непрерывныя дроби x и y въ простыя, имѣемъ:

$$x=\frac{41x+20}{2x+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

и $$y=\frac{20+y}{41+2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Рѣшая ур-іе (16), находимъ: $x=10\pm\sqrt{110}$, а рѣшая ур-іе (17), имѣемъ: $y=-10\pm\sqrt{110}$. Слѣдовательно, произведеніе этихъ дробей будетъ:

$$xy=(10\pm\sqrt{110})(-10\pm\sqrt{110})=(\sqrt{110})^2-(10)^2=10. \quad (18)$$

Итакъ, видимъ, что въ первомъ сплавѣ количества металловъ относились, какъ 2:3:1, во второмъ, какъ 2:4:3, и въ третьемъ, какъ 1:2:1 и что требуется составить сплавъ, чтобы отношенія металловъ были 10:18:10.

Пусть для составленія новаго сплава надо было взять x частей отъ перваго сплава, y — отъ второго, и z отъ третьяго; тогда на x частей перваго сплава золота придется $\frac{2x}{6}$, серебра $\frac{3x}{6}$ и мѣди $\frac{x}{6}$, такъ какъ въ каждой части перваго сплава на $2+3+1=6$ частей смѣси приходится 2 части золота, 3 серебра и 1 мѣди. Такимъ же образомъ во второмъ сплавѣ на y частей придется $\frac{2y}{9}$ золота, $\frac{4y}{9}$ серебра и $\frac{3y}{9}$ мѣди и въ третьемъ на z частей придется $\frac{z}{4}$ золота, $\frac{2z}{4}$ серебра и $\frac{4}{z}$ мѣди. По условію задачи количество золота, взятаго отъ данныхъ трехъ сплавовъ, должно равняться 10 частямъ, серебра 18 и мѣди 10. Отсюда имѣемъ 3 ур-ія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{6}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{4}&=10\\ \frac{3x}{6}+\frac{4y}{9}+\frac{2z}{4}&=18\\ \frac{x}{6}+\frac{3y}{9}+\frac{z}{4}&=10 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или, по упрощеніи,

$$12x+8y+9z=360 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$18x+16y+18z=648 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$6x+12y+9z=360 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Умноживъ ур-іе (4) сперва на 3, а потомъ на 2, и вычитая изъ полученныхъ ур-ій (2) и (3) (соотвѣтственно), исключаемъ x и получаемъ ур-ія:

$$16y+9z=360 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

и

$$20y+9z=432 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Откуда, вычитая, имѣемъ:

$$y=18 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, изъ (5) или (6)

$$z=8 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

а изъ любого изъ данныхъ ур-ій

$$x=12 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Отвѣтъ: 12, 18 и 8.

132. Въ равенствѣ (4) множитель $(a-b)$ есть нуль, такъ какъ изъ (1) $a=b$; но мы знаемъ, что на нуль сокращать нельзя; слѣдовательно, равенство (5) невѣрно.

133. Извлекая изъ обѣихъ частей равенства (9) квадратный корень и принимая во вниманіе, что онъ имѣетъ два значенія, въ равенствѣ (10) мы должны писать:

$$\pm\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=\pm\left(a-\frac{a+b}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

отсюда

$$\pm\left(\frac{b-a}{2}\right)=\pm\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Слѣдовательно, если брать знакъ $+$ въ лѣвой части, мы должны взять въ правой $-$. Такъ, напр., безусловно $(+2)^2=(-2)^2$, но $+2$ не равно -2.

134. Изъ равенства (6) имѣемъ, замѣтивъ, что $x=a$, слѣдующее:

$$(a-2a)^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или

$$(-a)^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Отсюда видимъ, какъ и въ предыдущемъ софизмѣ, что $(-a)$ не равно $(+a)$, слѣдовательно, необходимо считать:

$$\pm(-a)=\mp a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

такъ какъ квадратный корень имѣетъ два значенія.

135. Переходъ отъ (3) къ (4) равенствамъ невѣренъ, такъ какъ квадратный корень имѣетъ два значенія. (См. пред. софизмъ).

136. Равенство (2) не есть пропорція, такъ какъ пропорціей называется равенство двухъ такихъ отношеній, въ которыхъ предыдущіе члены или оба больше, или оба меньше послѣдующихъ.

137. Равенство (9) дѣлить на количество $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ нельзя, такъ какъ, въ силу равенства (2), имѣемъ, что $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$, а на нуль сокращать нельзя.

138. Въ теоріи мнимыхъ количествъ вводится условіе, въ силу котораго $(\sqrt{-a})^2$ считается равнымъ $-a$, хотя онъ, вообще говоря, равенъ $\pm a$.

139. Выраженіе (1) вѣрно только при m не равномъ нулю или безконечности, потому что выраженіе $\frac{0}{0}$ есть выраженіе неопредѣленное, а $\frac{\infty}{\infty}$ выраженіе чисто условное, которое мы не можемъ сократить на ∞, такъ какъ (что извѣстно изъ алгебры), ∞ не равна ∞. Такъ, напр., ∞ и $\infty+5$ будетъ все равно безконечность.

140. Изъ равенства (1) имѣемъ: $x=\infty$. Слѣдовательно, въ равенствѣ (3) будемъ имѣть: $\infty-\infty=a$...(1). Но $\infty-\infty$ не есть нуль, а есть величина неопредѣленная.

141. Извлекая корень степени $(x-2)(x^2-5x+6)$, т.-е. дѣля показатели на это выраженіе, мы тѣмъ самымъ дѣлимъ оба показателя на нуль (при $x=3$), сокращая на него показатель лѣвой части и оставляя его въ правой, вслѣдствіе чего у насъ и получается нелѣпость.

142. Изъ теоріи неравенствъ извѣстно, что правила о перемноженіи неравенствъ выведены при условіи, чтобы обѣ части неравенствъ имѣли одинаковые знаки. Поэтому наше перемноженіе неправильно.

143. Вслѣдствіе того, что выраженіе: ∞ не можетъ быть считаемо постояннымъ, т.-е. $\infty=\infty$ не будетъ равенствомъ, такъ же какъ $\infty-\infty\neq 0$ (т.-е. не равно нулю), то считать въ выраженіяхъ (3) количество множителей одинаковымъ нельзя, а потому равенство (4) ошибочно.

144. См. софизмъ № 139, примѣняя его опроверженіе къ выраженію $\frac{m}{m}$ при $m=\infty$.

145. Равенство (1) можетъ быть переписано въ видѣ:

$$\lg 1-\lg 2=\lg 1-\lg 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

или, такъ какъ $\lg 1=0$,

$$-\lg 2=-\lg 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Вслѣдствіе того, что равенство (1) въ обѣихъ частяхъ имѣетъ знаки отрицательные, то двѣ отрицательныя величины будутъ меньше одной отрицательной, т.-е.

$$2\lg\left(\tfrac{1}{2}\right)<\lg\tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

146. Дѣля неравенство (3) на $\lg\frac{1}{2}$ мы должны измѣнить знакъ на обратный, такъ какъ $\lg\frac{1}{2}=-\lg 2$, т.-е. величина отрицательная.

147. Въ теоріи логариѳмовъ вводится условіе, что при положительномъ основаніи отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, а въ данномъ софизмѣ разсматривается отрицательное основаніе.

148. Такъ какъ

$$\lg\frac{a+b+c+\cdots+l}{abc\ldots l}=\lg(a+b+\cdots+l)-\lg(abc\ldots l)$$

и такъ какъ большему числу соотвѣтствуетъ и большій логариѳмъ, то разность данныхъ логариѳмовъ будетъ отрицательна. Поэтому въ неравенствѣ (2) надо взять знакъ неравенства обратный, такъ какъ двѣ отрицательныя величины меньше одной отрицательной.

149. Равенство (3) можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\lg ab+\lg\frac{1}{ab}+\lg\frac{a}{\sqrt{ab}}+\lg\frac{b}{\sqrt{ab}}=\lg\sqrt{\frac{a^2}{ab}}+\lg\sqrt{\frac{b^2}{ab}}=$$

$$=\lg\sqrt{\frac{a}{b}}+\lg\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

Слѣдовательно неравенство (4) можетъ быть написано такъ:

$$\lg ab+\lg\frac{1}{ab}>\lg\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

т.-е.

$$\lg ab+\lg\frac{1}{ab}>\frac{1}{2}\lg\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

или

$$\lg\frac{ab}{ab}>\frac{1}{2}\lg\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (d)$$

или

$$2\lg 1>\lg\frac{a}{b} \quad \text{или} \quad 1>\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

Но если

$$\frac{a}{b}<1, \quad \text{то} \quad \frac{b}{a}>1.$$

Слѣдовательно, если

$$1<\frac{b}{a},$$

то $$\lg 1 < \lg \frac{b}{a}$$

и $$\lg 1^2 < \lg \frac{b}{a}$$

или $$2 \lg 1 < \lg \frac{b}{a}$$

или $$\lg \frac{ab}{ab} < \frac{1}{2} \lg \frac{b}{a}$$

или $$\lg ab + \lg \frac{1}{ab} < \lg \sqrt{\frac{b}{a}}$$

или $$\lg ab + \lg \frac{1}{ab} < \lg \sqrt{\frac{b^2}{ab}}$$

или $$\lg ab + \lg \frac{1}{ab} < \lg \frac{b}{\sqrt{ab}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Отсюда видимъ, что формула (5) невѣрна. Знакъ неравенства должно взять обратно, такъ какъ мы видѣли, что если въ неравенствѣ (4) ставить знакъ $>$, то въ неравенствѣ (5) надо ставить $<$.

150. Въ формулѣ (1) мы можемъ брать $a < 1$, такъ какъ это есть формула суммы безконечно убывающей геометрической прогрессіи.

Если мы будемъ брать $a > 1$, то необходимо дописывать строку (1) до конца, т.-е. писать:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \frac{a^3}{1-a}$$

или $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1-a}$$

и т. д., вообще брать строку съ остаточнымъ частнымъ. Тогда результатъ подстановки вмѣсто a любого значенія даетъ намъ тождество, въ силу того, что членъ $\frac{a^3}{1-a}$ или $\frac{a^5}{1-a}$ при $a > 1$ будетъ отрицательнымъ и по абсолютной величинѣ больше суммы предыдущихъ членовъ на величину $\frac{1}{1-a}$, въ чемъ легко убѣдиться простой подстановкой.

151. Извѣстно, что строка бинома имѣетъ $n+1$ членовъ, гдѣ n показатель степени бинома. Тотъ видъ, какой данъ строкѣ бинома въ данномъ софизмѣ въ равенствѣ (1) придается ему условно. Зная показатель n, надо разлагать биномъ по данной формулѣ слѣдующимъ образомъ:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1-2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

при подстановкѣ даннаго n въ эту строку самъ собой получится членъ, равный нулю, это будетъ $(n+2)$-ой членъ. Подставлять же данныя значенія въ строку (1), гдѣ конецъ разложенія имѣетъ чисто условный видъ, будетъ безусловно ошибочно.

152. См. предыдущій софизмъ.

Геометрія.

153. Такъ какъ каждый изъ угловъ BOC, AOC и AOB, согласно условію, долженъ равняться 120°, то на основаніи извѣстной теоремы тригонометріи, по которой

$$a^2=y^2+z^2-2yz\,\mathrm{cs}\,120°$$

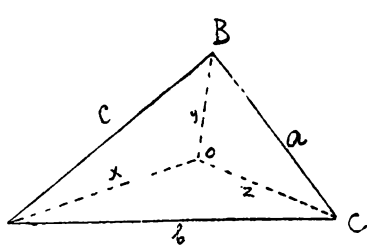
замѣтивъ, что

$$\mathrm{cs}\,120°=-\mathrm{sn}\,30°=-\tfrac{1}{2}$$

имѣемъ систему ур-ій:

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2+yz&=a^2\\ x^2+z^2+xz&=b^2\\ x^2+y^2+xy&=c^2 \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (1)$$

Черт. 18.



Прибавивъ къ 1-й части каждаго ур-ія и въ то же время вычтя изъ нея сумму $(xy+xz+yz)$, получимъ:

$$xz+xy+(y+z)^2-(yz+xz+xy)=a^2$$

и т. д., или

$$x(y+z)+(y+z)^2-(xy+xz+yz)=a^2$$

и т. д., или, окончательно

$$(y+z)(x+y+z)-(xy+xz+yz)=a^2\ \ldots\ldots\ (2)$$
$$(x+z)(x+y+z)-(xy+xz+yz)=b^2\ \ldots\ldots\ (3)$$
$$(x+y)(x+y+z)-(xy+xz+yz)=c^2\ \ldots\ldots\ (4)$$

Пусть $x+y+z=t$ и $xy+yz+xz=u$,
тогда ур-ія принимаютъ видъ:

$$(y+z)t-u=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$(x+z)t-u=b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$
$$(x+y)t-u=c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Складывая ур-ія (5), (6) и (7) и упрощая, имѣемъ:

$$2t^2=3u+a^2+b^2+c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Далѣе, сложивъ каждые два изъ ур-ій (5), (6) и (7) и вычтя третье, будемъ имѣть:

$$2xt=u+(b^2+c^2-a^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$
$$2yt=u+(a^2+c^2-b^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$
$$2zt=u+(a^2+b^2-c^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Умноживъ далѣе ур-іе (9) на (10) и (9) на (11), а затѣмъ (10) на (11) и сложивъ произведенія, будемъ имѣть:

$$4ut^2=3u^2+2(a^2+b^2+c^2)u+2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4 \quad (12)$$

Легко убѣдиться, что

$$2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=$$
$$=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \ldots\ldots (13)$$

Обозначимъ произведеніе (13) черезъ M, тогда ур-іе (12) приметъ видъ:

$$4ut^2=3u^2+2(a^2+b^2+c^2)u+M \ldots\ldots\ldots (14)$$

Рѣшаемъ теперь совмѣстно ур-ія (8) и (14). Исключая t^2, имѣемъ:

$$u=\sqrt{\frac{M}{2}} \quad \text{и} \quad t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3M}}{2}} \ldots (15)$$

Неизвѣстны же x, y и z получатся изъ ур-ій (9), (10) и (11).

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{3}}+b^2+c^2-a^2}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+\sqrt{3M}}} \ldots\ldots\ldots (16)$$

и т. д., при чемъ $M=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=16\Delta^2$, гдѣ Δ—площадь даннаго треугольника.

154. Пусть x и y будутъ стороны, составляющія уголъ въ 60°; и z—противолежащая этому углу сторона. Тогда, по тригонометрической формулѣ, имѣемъ:

$$z^2=x^2+y^2-2xy \operatorname{cs} 60^0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

или

$$z^2=x^2+y^2-xy \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

потому что $\operatorname{cs} 60°=\operatorname{sn} 30°=\frac{1}{2}$.

Пусть $$z=nx+y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

тогда $$n^2x^2+2nxy+y^2=x^2+y^2-xy \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

или $$n^2x^2+(2n+1)xy=x^2$$

или $$n^2x+(2n+1)y=x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

откуда $$y=\frac{(1-n^2)x}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Слѣдовательно, изъ условія (3),

$$z=nx+\frac{(1-n^2)x}{2n+1}=\frac{(n^2+n+1)x}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ числа x, $\frac{(1-n^2)x}{2n+1}$ и $\frac{(n^2+n+1)x}{2n+1}$ должны быть цѣлыми, то, положивъ $n=\frac{p}{q}$ и выбравъ $x=q(2p+q)$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x&=q(2p+q)\\ y&=q^2-p^2\\ z&=p^2+pq-q^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ p и q произвольныя цѣлыя числа.

155. Пусть x, y и z будутъ стороны треугольника, тогда, обозначивъ его площадь черезъ Δ, получимъ:

$$\Delta=\tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)} \quad \ldots (1)$$

или $$(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)=16\Delta^2 \quad \ldots (2)$$

Пусть

$$y+z-x=2m\gamma,\ x+z-y=2n\gamma \text{ и } x+y-z=2p\gamma. \quad \ldots (3)$$

Рѣшивъ эти условныя равенства относительно x, y и z, получимъ:

$x=(n+p)\gamma$, $y=(m+p)\gamma$, $z=(m+n)\gamma$ и $x+y+z=2(m+n+p)\gamma$ (4)

Въ такомъ случаѣ ур-іе (2) приметъ видъ:

$$\gamma^4(m+n+p)mnp=\Delta^2,$$

откуда $$\Delta=\gamma^2\sqrt{(m+n+p)mnp} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Пусть $\Delta=\gamma^2p\rho$, гдѣ ρ новая произвольная величина, тогда

$$(m+n+p)mn=p\rho^2 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

откуда $$p=\frac{(m+n)mn}{\rho^2-mn} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно,

$$z=\gamma(m+n),\quad x=\left[n+\frac{(m+n)mn}{\rho^2-mn}\right]\gamma,\quad y=\left[m+\frac{(m+n)mn}{\rho^2-mn}\right]\gamma$$

и $$\Delta=\frac{\gamma^2(m+n)mn\rho}{\rho^2-mn} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Выбравъ для m, n и ρ произвольныя раціональныя значенія и притомъ такъ, чтобы $\rho^2 > mn$, получимъ для x, y, z и Δ тоже раціональныя значенія. А для того, чтобы эти значенія были вмѣстѣ съ тѣмъ и цѣлыми, выберемъ произвольное число γ равнымъ $\rho^2 - mn$, тогда будемъ имѣть:

$$x = n(\rho^2 + m^2); \quad y = m(\rho^2 + n^2); \quad z = (m+n)(\rho^2 - mn)$$

и
$$\Delta = mn\rho(m+n)(\rho^2 - mn) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

156. Пусть x и y суть катеты искомаго прямоугольнаго треугольника; тогда гипотенуза выразится чрезъ $\sqrt{x^2+y^2}$. По условію задачи периметръ даннаго треугольника долженъ равняться его площади, слѣдовательно,

$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{xy}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или
$$2\sqrt{x^2+y^2} = xy - 2x - 2y \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Возводя въ квадратъ, имѣемъ:

$$4x^2 + 4y^2 = x^2y^2 + 4y^2 + 4y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 8xy \quad \ldots (3)$$

или, сокращая,
$$x^2y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 8xy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Или, дѣля на xy, имѣемъ:

$$xy - 4x - 4y + 8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

или
$$xy - 2x - 4y + 8 - 2x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или
$$x(y-2) - 4(y-2) - 2x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Пусть $y - 2 = t$, откуда
$$y = t + 2 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Тогда ур-іе (7) даетъ:
$$xt - 4t - 2x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

или
$$x(t-2) - 4t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

т.-е.
$$x = \frac{4t}{t-2} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Такъ какъ стороны треугольника положительны, то

$$y > 0 \quad \text{и} \quad x > 0$$

т.-е.
$$t + 2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{4t}{t-2} > 0$$

или
$$t > -2 \quad \text{и} \quad t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Беремъ большій предѣлъ
$$t > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Такъ какъ одна изъ сторонъ Δ-ка больше другой (а они не равны, такъ какъ въ задачѣ этого не дано), то пусть $x > y$, т.-е.

$$\frac{4t}{t-2} > t + 2 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

или $4t > t^2 - 4$ . . . . . (14)

или $t^2 - 4t - 4 < 0$. . . . . (15)

или, разлагая его на множителей 1-ой степени (приравнявъ нулю), имѣемъ:

$$[t-(2+2\sqrt{2})][t-(2-2\sqrt{2})]<0 \quad . . . . . (16)$$

откуда или $t < 2+2\sqrt{2}$ . . . . . (17)

или $t < 2-2\sqrt{2}$. . . . . (18)

Изъ неравенства (17) имѣемъ:

$$t < 5 \quad . . . . . (19)$$

[полагая $4 < 2+2\sqrt{2} < 5$].

Кромѣ того, изъ формулы $x = \frac{4t}{t-2}$ видимъ, что x будетъ положительнымъ, если $t \geqslant 3$, такъ какъ только при $t=3$ и болѣе знаменатель положителенъ. Итакъ, имѣемъ предѣлы для t:

$$5 > t \geqslant 3 \quad . . . . . (20)$$

Откуда видимъ, что t можетъ принимать значенія 3 и 4.

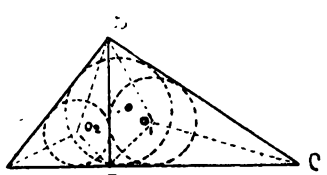
Если $t=3$, то $x=12$, $y=5$ и $\sqrt{x^2+y^2}=13$.

Если $t=4$, то $x=8$; $y=6$ и $\sqrt{x^2+y^2}=10$.

Отвѣтъ: 13, 12, 5 и 10, 8, 6.

157. Пусть периметръ большого треугольника есть $2p$, а малыхъ соотвѣтственно $2p_1$ и $2p_2$.

Черт. 19.



Соединивъ центры вписанныхъ окружностей со сторонами соотвѣтствующихъ треугольниковъ, будемъ имѣть въ треугольникѣ BCD:

$$\triangle BCD = \triangle BO_1C + \triangle DO_1C + \triangle BO_1D =$$

$$= \frac{BC \cdot r_1}{2} + \frac{DC \cdot r_1}{2} + \frac{BD \cdot r_1}{2} = \frac{r_1}{2}(2p_1) = p_1 r_1 \quad . . . . (1)$$

но $r_1 = 4$. Слѣдовательно, площадь треугольника BCD равна

$$4p_1 \quad . . . . . (2)$$

Такимъ же образомъ $\triangle ABD = 3p_2$. Площадь же большого треугольника ABC будетъ pr. Но мы знаемъ, что

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle BDC \quad . . . . . (3)$$

слѣдовательно, $pr = 4p_1 + 3p_2$. . . . . (4)

Но, такъ какъ треугольники ABC, BCD и ABD подобны, то

$$\frac{p}{r} = \frac{p_1}{4} = \frac{p_2}{3} \quad . . . . . (5)$$

Обозначивъ какое-либо изъ отношеній (5) черезъ q, имѣемъ:

$$\frac{p}{r}=q,\quad \frac{p_1}{3}=q \text{ и } \frac{p_2}{2}=q \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

откуда $$p=qr,\quad p_1=4q \text{ и } p_2=3q \ldots\ldots\ldots (7)$$

Вставляя вмѣсто p, p_1 и p_2 ихъ значенія изъ (7) въ ур-іе (4), имѣемъ:

$$qr^2=16q+9q \ldots\ldots\ldots (8)$$

откуда, дѣля на q,

$$r^2=16+9$$

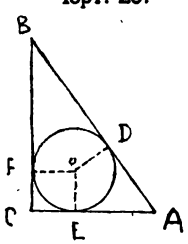
или

$$r=5. \ldots\ldots\ldots (9)$$

Отвѣтъ: **5.**

158. Пусть ABC данный треугольникъ и пусть $BD=3$ и $AD=2$. Изъ разсмотрѣнія элементовъ даннаго треугольника видимъ, что $BF=BD=3$ и $AE=AD=2$. Пусть $FC=CE=x$, тогда

Черт. 20.



$$AB^2=BC^2+AC^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$5^2=(3+x)^2+(2+x)^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

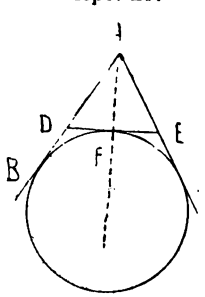
откуда имѣемъ ур-іе:

$$x^2+5x-6=0 \ldots\ldots\ldots (3),$$

изъ котораго $x=1$; другой корень отрицательный. Слѣдовательно, площадь равна $\frac{BC\,.\,AC}{2}=\frac{4\,.\,3}{2}=6$. . (3)

Отвѣтъ: **6.**

Черт. 21.



159. Пусть A есть данная точка, AB и BC — касательныя, F точка пересѣченія биссектриссы AF съ окружностью и DE — третья касательная.

Изъ геометріи извѣстно, что $DF=BD$ и $EF=EC$. Вслѣдствіе чего искомый периметръ будетъ:

$$2p=AD+AE+DE=AD+AE+DF+FE \quad (1)$$

или

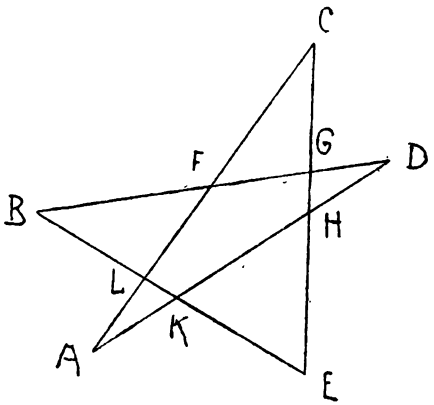
$$2p=AD+DB+AE+EC=AB+AC=2a \quad (2)$$

Отвѣтъ: **2a.**

160. Сумма угловъ въ треугольникахъ AKL, LBF, FCG, GDH и HEK, будетъ въ каждомъ 2d, а во всѣхъ 10d.

углы же AKL, BLF, CFG, DGH и EHK будутъ внѣшними для многоугольника $FGHKL$, сумма ихъ равна 4d, а углы ALK, BFL, CGF, DHG и EKH будутъ также внѣшними для того же многоугольника $FGHKL$; сумма же тѣхъ и другихъ есть 8d. Вычтя сумму угловъ при точкахъ F, G, H, K и L, изъ суммы всѣхъ угловъ $\triangle\triangle$-ковъ AKL, LBF и т. д., получимъ сумму угловъ при вершинахъ; она равна 10d—8d=2d.

Черт. 22.



Отвѣтъ: 2d.

161. Изъ каждой вершины мы можемъ провести всего $(n—3)$ діагоналей; такъ какъ всего вершинъ у насъ n, то діагоналей изъ всѣхъ вершинъ мы проведемъ $n(n—3)$, при чемъ каждую изъ нихъ мы должны будемъ въ этомъ случаѣ проводить по два раза, напр., изъ первой вершины въ третью и, далѣе, изъ третьей въ первую. Такимъ образомъ найдемъ, что всѣхъ діагоналей въ многоугольникѣ должно быть вдвое менѣе количества $n(n—3)$, то-есть $\frac{n(n—3)}{2}$.

Отвѣтъ: $\frac{n(n—3)}{2}$.

162. По даннымъ задачи имѣемъ x вершинъ и 20 діагоналей. Основываясь на предыдущей задачѣ, имѣемъ ур-іе:

$$\frac{x(x—3)}{2}=90$$

или $$x^2—3x—40=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Откуда $$x_1=8; \quad x_2=—5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Годится корень $x=8$.

Отвѣтъ: 8.

163. На основаніи задачи № 161 можемъ составить ур-іе:

$$\frac{n(n—3)}{2}=7n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда $$n^2—17n=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

что даетъ $n=17$.

Отвѣтъ: въ 17-угольникѣ.

164. Каждая грань пирамиды должна состоять изъ трехъ реберъ, которыя можно комбинировать столькими способами, сколько единицъ въ C_6^3, т.-е. $C_6^3=\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}=20$. Очевидно, что тогда для каждой грани составится P_3 пирамидъ, т.-е. $P_3=1\,.\,2\,.\,3=6$. Слѣдовательно, всѣхъ пирамидъ будетъ $C_6^3\,.\,P_3=120$. Но, вслѣдствіе того, что при такой комбинаціи составятся пирамиды одинаковыя относительно каждой изъ полученныхъ четырехъ граней, то совершенно различныхъ пирамидъ будетъ въ 4 раза меньше, т.-е. $\frac{1}{4}C_6^3P_3=30$.

Отвѣтъ: 30.

165. Площадь круга равна πr^2, гдѣ r радіусъ круга. По условію задачи, имѣемъ:

$$\pi r^2=r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или дѣля на πr, имѣемъ:

$$r=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Длина окружности равна $2\pi r$, вставляя вмѣсто r найденную величину, имѣемъ:

$$C=2\pi r=2\pi\cdot\frac{1}{\pi}=2.$$

Отвѣтъ: 2.

166. Пусть длина первой нитки a, а второй $2a$. Перевязавъ ниткой a дюжину карандашей, мы въ сѣченіи получимъ нѣкоторую площадь Q, обвязавъ же ниткой длиной въ $2a$ возможное число карандашей, получимъ нѣкоторую площадь Q_1. Изъ геометріи извѣстно, что площади относятся, какъ квадраты периметровъ, слѣдовательно,

$$Q:Q_1=a^2:(2a)^2=a^2:4a^2=1:4 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

На первую площадь Q приходится 12 карандашей; пусть на вторую площадь Q_1 приходится ихъ x, тогда

$$Q:Q_1=12:x=1:4. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Откуда

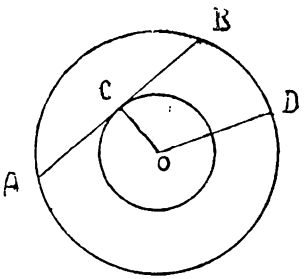
$$x=48. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отвѣтъ: 48.

167. Средины всѣхъ хордъ, бо́льшихъ AB (стороны вписаннаго треугольника), составляютъ площадь круга радіуса OC, средины же всѣхъ возможныхъ хордъ составляютъ площадь круга радіуса R $(=OD)$. Но мы знаемъ, что $OC=\frac{R}{2}$, какъ раз-

стояніе отъ центра до стороны треугольника; слѣдовательно, площадь малаго круга есть $\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{\pi R^2}{4}$, а площадь большого πR^2. Отсюда искомая вѣроятность P выразится такъ:

Черт. 23.

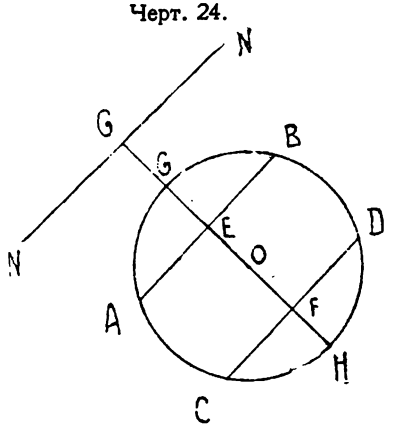


$$P=\frac{\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)}{\pi R^2}=\frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Отвѣтъ: $\frac{1}{4}$.

168. Пусть AB сторона вписаннаго треугольника, параллельная заданной линіи MN. Средины всѣхъ хордъ, бо́льшихъ AB или CD, составляютъ отрѣзокъ EF, перпендикулярный къ MN и равный R $\left(\text{такъ какъ } OE=\frac{R}{2}\right.$ и $\left.OF=\frac{R}{2}\right)$. Средины же всѣхъ возможныхъ хордъ есть діаметръ GH. Слѣдовательно, искомая вѣроятность P будетъ:

Черт. 24.

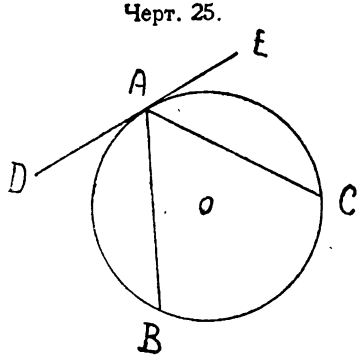


$$P=\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}.$$

Отвѣтъ: $\frac{1}{2}$.

169. Пусть AB и CD стороны треугольника, проходящія черезъ данную точку A. Всѣ хорды, исходящія изъ точки A и большія AB, заключаются въ углѣ $BAC=60°$. Всѣ же возможныя хорды, исходящія изъ A, заключены въ углахъ DAB, BAC и CAE, сумма которыхъ будетъ 180°. Слѣдовательно, искомая вѣроятность P будетъ:

Черт. 25.

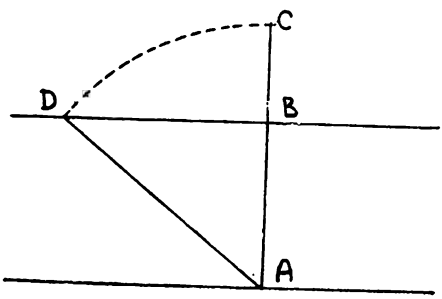


$$P=\frac{60°}{180°}=\frac{1}{3}.$$

Отвѣтъ: $\frac{1}{3}$.

170. Пусть надъ поверхностью рѣки выступаетъ часть тростника $BC = a$ и пусть искомая глубина рѣки, равная AB, будетъ x. Взявъ за конецъ C тростника, отведемъ его въ положеніе AD такъ, чтобы верхняя его точка C очутилась въ D. Длину BD мы можемъ измѣрить; пусть она равна b; длина же $AD = AC = AB + BC = x + a$. Изъ прямоугольнаго треугольника имѣемъ:

Черт. 26.



$$AD^2 = BD^2 + AB^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

или $$(x+a)^2 = b^2 + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или $$x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

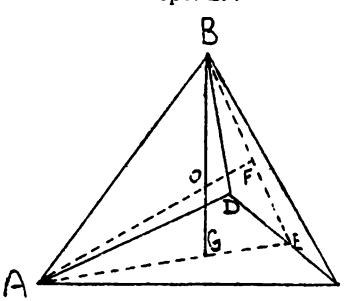
или $$2ax = b^2 - a^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Откуда искомая глубина будетъ:

$$x = \frac{b^2 - a^2}{2a} = \frac{(b+a)(b-a)}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

171. Пусть A, B, C и D будутъ центрами данныхъ четырехъ шаровъ, радіусы которыхъ равны R. Соединивъ эти точки между собой, получимъ правильную пирамиду, ребро которой равно $2R$ (такъ какъ шары касаются). Центръ шара, касающагося всѣхъ четырехъ данныхъ шаровъ, будетъ находиться въ точкѣ, равноотстоящей отъ центровъ данныхъ шаровъ, а, слѣдовательно, и отъ вершинъ нашей пирамиды. Не трудно замѣтить, что центръ этого шара будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ пирамиды на противоположныя грани (при чемъ точки F и G будутъ лежать на пересѣченіи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ B, C, D, A и т. д. на противоположныя ребра). Если мы найдемъ длину линіи BO, т.-е. разстояніе центровъ даннаго шара отъ искомаго,

Черт. 27.



и вычтемъ величину радіуса R, то получимъ искомый радіусъ r шара, касающагося ко всѣмъ четыремъ даннымъ. Для отысканія длины OB поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{(2R)^2-R^2}=R\sqrt{3} \quad \ldots \quad (1)$$

$$GE=\frac{AE}{3}=\frac{R\sqrt{3}}{3} \quad \ldots \quad (2)$$

(Свойство медіанъ, по которому $GE=\frac{AE}{3}$, извѣстно изъ геометріи.)

Далѣе, $$BE=AE=R\sqrt{3} \quad \ldots \quad (3)$$

Изъ треугольника BEG имѣемъ:

$$BG=\sqrt{BE^2-GE^2}=\sqrt{3R^2-\frac{3R^2}{9}}=\frac{2R\sqrt{6}}{3} \quad \ldots \quad (4)$$

Изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ BOF и BEG имѣемъ:

$$OB:BF=BE:BG \quad \ldots \quad (5)$$

но $BF=\frac{2}{3}BE$ или

$$BF=\frac{2R\sqrt{3}}{3} \quad \ldots \quad (6)$$

Вставляя значенія BF, BE и BG въ формулу (5), имѣемъ:

$$OB:\frac{2R\sqrt{3}}{3}=R\sqrt{3}:\frac{2R\sqrt{6}}{3} \quad \ldots \quad (7)$$

Откуда $$OB=\frac{R\sqrt{6}}{2} \quad \ldots \quad (8)$$

Слѣдовательно, искомый радіусъ будетъ:

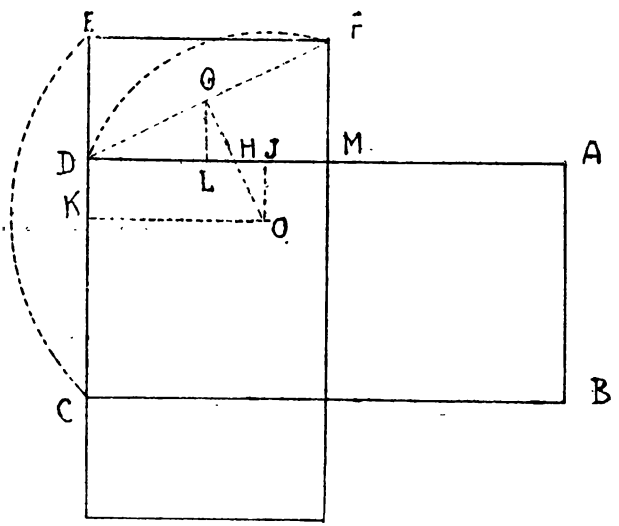
$$r=\frac{R\sqrt{6}}{2}-R=\frac{R}{2}(\sqrt{6}-2) \quad \ldots \quad (9)$$

Отвѣтъ: $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-2)$.

172. Неподвижная рама всякаго ломбернаго стола представляетъ изъ себя прямоугольникъ, въ которомъ длинныя стороны вдвое больше короткихъ. Разберемъ такой столъ, у котораго верхняя доска, въ сложенномъ видѣ совпадаетъ краями съ рамой, т.-е. представляетъ прямоугольникъ, равный рамѣ. При открываніи стола доска его повертывается и приводится въ положеніе, перпендикулярное рамѣ, при чемъ сторона BC сливается съ CD, оставляя съ обѣихъ сторонъ равные концы.

Эта доска вращается около центра O (который требуется опредѣлить) такъ, что точки C и D описываютъ концентрическія окружности. Слѣдовательно, для отысканія центра надо изъ срединъ хордъ, т.-е. изъ срединъ линій CE и FD, возставить перпендикуляры, пересѣченіе которыхъ и дастъ искомый центръ. Обозначая короткую сторону CD черезъ a, найдемъ, что $CE=\frac{3}{2}a$, слѣдовательно, $CK=\frac{3}{4}a$. Отсюда видимъ, что точка K опредѣляется такъ: она лежитъ на линіи CD, на разстояніи $\frac{3}{4}CD$ отъ точки C или, иначе, эта точка K дѣлитъ линію CD въ отно-

Черт. 28.

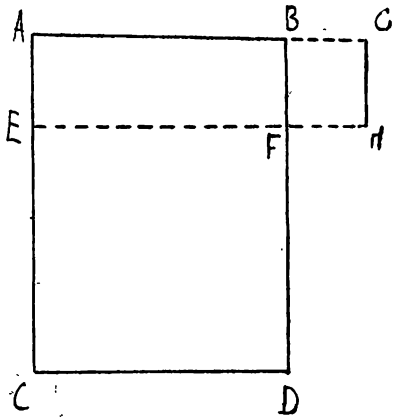


шеніи $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3:1$. Найдемъ другую точку—$J$. Нетрудно видѣть что $OH=HG$ и что точка G отстоитъ отъ AD на разстояніи $\frac{a}{4}$. Дѣйствительно, точка F отстоитъ отъ AD на разстояніи $DE=\frac{a}{2}$, а точка G дѣлитъ FD пополамъ, а потому отстоитъ на разстояніи $\frac{a}{4}$ отъ AD. Но $OJ=KD=\frac{a}{4}$, слѣдовательно, $OJ=GL$, а изъ $\triangle\triangle$-ковъ OJH и HLG имѣемъ $OH=HG$ и $HL=HJ$. Кромѣ того, такъ какъ $FG=GD$, то $ML=LD$ (такъ какъ $MF \parallel LG$). Но $AD=$

$=2CD=2a$. Слѣдовательно, $LD=\frac{a}{2}$. А такъ какъ точка J дѣлитъ ML пополамъ, то $LJ=\frac{a}{4}$. Откуда $DJ=\frac{3}{4}a$. Слѣдовательно $AJ=\frac{5}{4}a$. Отсюда видимъ, что точка J дѣлитъ AD въ отношеніи 3 : 5.

173. Пусть плита, указанная въ завѣщаніи, имѣетъ форму прямоугольника $ABCD$, при чемъ отрѣзокъ ея $ABFE$ равенъ 25 кв. четв., а отрѣзокъ $EFCD$, представляетъ собою квадратъ. Площадь такой плиты равна $AB\,.\,AC$ или 25 кв. четв. $+AB^2$. Пусть $AC=x$, а $AB=y$; тогда $xy=25+x^2$ . . . (1) откуда $x_1=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2-100})$ и $x_2=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2-100})$ . . (2)

Черт. 29.



По условію задачи плита, положенная наслѣдниками, должна имѣть при одинаковой длинѣ (y), ширину вчетверо меньше ширины плиты, предложенной завѣщателемъ, т.-е.

$$x_1=4x_2 \text{ или } \tfrac{1}{2}(y+\sqrt{y^2-100})=2(y-\sqrt{y^2-100}) \text{ . . (3)}$$

Рѣшая ур-іе (3), находимъ, что обозначенная въ завѣщаніи плита имѣла длину $y_1=12\frac{1}{2}$ четв., а слѣдовательно, ширина ея въ первомъ случаѣ равна $x_1=10$ четв., а во второмъ: $x_2=2\frac{1}{2}$ четв. Площадь первой равна, слѣдовательно, 125 кв. четв., $(12\frac{1}{2}\,.\,10)$, а второй $31\frac{1}{4}$ кв. четв. $(12\frac{1}{2}\,.\,2\frac{1}{2})$. Какъ видно изъ чертежа, вторая плита имѣетъ форму прямоугольника $AGHE$.

174. Треугольникъ ABM и CDN (см. черт. къ задачѣ) прямоугольные, такъ какъ углы при B и D опираются на діаметръ. Изъ треугольника ABM имѣемъ: $MA^2=AB^2+BM^2$...(1), а изъ $\triangle$-ка CDM имѣемъ: $CN^2=DN^2+CD^2$...(2). Принимая во вниманіе, что $BC=2AB$ и $AM=MC$, получаемъ: $AB=\frac{1}{2}(BM+MC)=\frac{1}{2}(BM+AM)$...(3) или $AM=2AB-MB$; откуда $AM^2=4AB^2-4AB\,.\,BM+BM^2$...(4). Изъ сопоставленія равенствъ (1) и (4) опредѣляемъ: $3AB=4AM$...(5). Подобнымъ же образомъ

имѣемъ: $AD=3CD$ и $AN=CN$, а потому $CD=\frac{1}{3}(DN+CN)$ или $CN=3CD-DN$, откуда $CN^2=9CD^2-6CD\,.\,DN+DN^2$...(6). Изъ сопоставленія равенствъ (2) и (6) получаемъ: $3DN=4CD$...(7) Дѣля равенство (5) на (7), имѣемъ: $AB:DN=AM:CD$, что и указываетъ на пропорціональность катетовъ треугольниковъ ABM и CDN.

NB. Того же результата можно достигнуть вычисленіемъ сторонъ треугольниковъ ABM и CDN, принимая радіусъ окружности равнымъ единицѣ.

175. Пусть R есть радіусъ земного шара. Длина окружности (экватора) будетъ $2\pi R$. Тогда длина веревки послѣ ея удлиненія будетъ: $2\pi R+1=2\pi\left(R+\frac{1}{2\pi}\right)$...(1). Очевидно, что радіусъ кольца изъ веревки будетъ: $R+\frac{1}{2\pi}$, а такъ какъ радіусъ земного шара R, то разстояніе отъ поверхности шара до кольца будетъ $\frac{1}{2\pi}$. Такимъ же образомъ пусть r есть радіусъ малаго шара, величиной съ апельсинъ. Тогда длина его большой окружности будетъ $2\pi r$. Длина же кольца послѣ удлиненія будетъ: $2\pi r+1=2\pi\left(r+\frac{1}{2\pi}\right)$. Такъ какъ $r+\frac{1}{2\pi}$ будетъ радіусъ кольца, то разстояніе отъ поверхности малаго шара до кольца будетъ также $\frac{1}{2\pi}$. Итакъ, величина $\frac{1}{2\pi}$ будетъ во всѣхъ случаяхъ постоянна.

Отвѣтъ: одинаково.

176. Изъ разсмотрѣнія предыдущей задачи видимъ, что радіусы послѣдовательныхъ длинъ окружностей будутъ соотвѣтственно:

$$r,\ r+\frac{1}{2\pi},\ r+2\frac{1}{2\pi},\ r+3\frac{1}{2\pi}\cdots \text{ ad infinit. . . (1)}$$

Слѣдовательно, рядъ, изображающій послѣдовательныя приращенія радіусовъ, будетъ:

$$\frac{1}{2\pi},\ 2\frac{1}{2\pi},\ 3\frac{1}{2\pi}\cdots \text{ ad infinit. . . . . (2)}$$

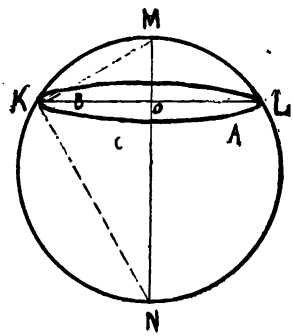
или, дѣля на $\frac{1}{2\pi}$, имѣемъ окончательно:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots \text{ ad infinit. . . . . (3)}$$

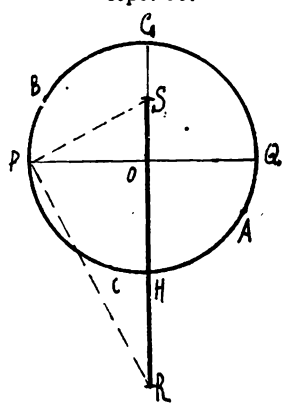
Отвѣтъ: 1, 2, 3, 4, 5.

177. Поставивъ ножку циркуля въ любую точку M шара, произвольнымъ радіусомъ описываемъ на поверхности его окружность, на которой беремъ произвольно 3 точки A, B и C. Разстоянія между ними измѣряемъ и, откладывая ихъ на бумагѣ, описываемъ окружность, проходящую черезъ эти три точки. Проводимъ діаметръ $PQ=KL$ и перпендикулярный ему GH. Точка P лежитъ на поверхности шара и соотвѣтствуетъ точкѣ K. Далѣе прежнимъ радіусомъ, равнымъ KM, дѣлаемъ засѣчку на діаметрѣ MN, получаемъ точку S, и, наконецъ, изъ P возставляемъ $\perp$ къ PS до встрѣчи съ MN въ точкѣ R. Разстояніе PS дастъ діаметръ шара, соотвѣтствующій MN.

Черт. 30.

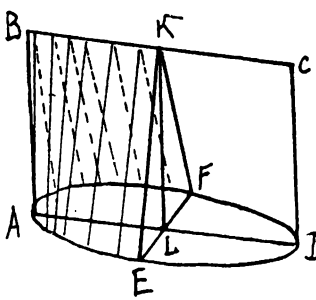


Черт. 31.



178. Тѣло должно имѣть видъ такъ называемаго коноидальнаго клина, который мы получимъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ кругъ, діаметръ котораго равенъ a. На одномъ изъ діаметровъ круга построимъ квадратъ такъ, чтобы $AB=AD=a$. Взявъ діаметръ EF, перпендикулярный къ AD и возставивъ перпендикуляръ KL изъ точки L къ плоскости круга, получимъ точку K на сторонѣ квадрата BC (такъ, что $BK=KC=AL=LD$). Тогда треугольникъ EKF будетъ равнобедренный, съ высотою a. Если теперь мы заставимъ AB двигаться сразу по двумъ направляющимъ: BC и окружности $AFDE$, параллельно плоскости EKF, то и получимъ требуемое тѣло, которое основаніемъ пройдетъ черезъ круглое отверстіе съ діамет-

Черт. 32.



ромъ a, черезъ квадратное отверстіе со стороной a пройдетъ частью $ABCD$, а черезъ отверстіе равнобедреннаго треугольника съ высотою a частью EKF, при чемъ это тѣло будетъ закрывать въ то же время плотно каждое изъ этихъ отверстій.

179. Переходъ отъ равенства (6) къ равенству (7) невѣренъ. Дѣйствительно, изъ чертежа видимъ, что

$$AB : BD = BC : BE \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

или, взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ, имѣемъ:

$$AB \,.\, BE = BD \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

или

$$AB \,.\, BE - BD \,.\, BC = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Выраженіе (c) и есть тотъ множитель, на который мы дѣлили выраженіе (6); но этотъ множитель (c) равенъ нулю, а на нуль сокращать нельзя.

180. Переходъ отъ формулы (9) къ (10)-й невѣренъ, такъ какъ стоящее въ скобкахъ выраженіе равно нулю. Дѣйствительно, изъ чертежа имѣемъ:

$$AE : AC = DG : FG$$

или

$$AE \,.\, FG = AC \,.\, DG$$

или

$$AE \,.\, FG - AC \,.\, DG = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a,$$

181. Неправильный чертежъ. При правильномъ построеніи точка 0 будетъ находиться всегда за продолженіемъ линіи BD, слѣд. точка B будетъ всегда по другую сторону прямой OD, вслѣдствіе чего $\triangle\triangle$-ки AOC и OBD дадутъ равные углы. Аналитическое доказательство того, что перпендикуляры пересѣкаются всегда только указаннымъ образомъ мы опускаемъ.

182. Такъ какъ въ четыреугольникѣ $BDFE$ два противоположные угла прямые ($BDF = BEF = \mathrm{d}$), т.-е. сумма ихъ равна 2d, то около этого четыреугольника можно описать окружность, которая обязательно пройдетъ черезъ точку B.

183. Неправильное разсужденіе. Дѣйствительно, какъ бы малы $\triangle\triangle$-ки BKE, ELD и т. д. ни были, въ нихъ всегда $BK + KE > BE$, $EL + LD > ED$ и т. д. Въ предѣлѣ всѣ эти треугольники оста-

нутся такими же треугольниками, а отрѣзки BE, ED, DF и т. д. въ суммѣ всегда дадутъ BC и всегда, слѣдовательно, будетъ неравенство $AB+AC>BC$.

184. Неправильный чертежъ. Извѣстно, что окружности, описанныя на двухъ сторонахъ треугольника, какъ на діаметрахъ, пересѣкаются въ точкѣ, лежащей на третьей сторонѣ.

Дѣйствительно, опустивъ изъ B перпендикуляръ на AC, получимъ два прямоугольныхъ треугольника, гипотенузами которыхъ будутъ стороны BC и AB, а гипотенузы, если только около этихъ треугольниковъ описаны окружности, будутъ служить діаметрами.

185. Проведя изъ точки D параллель линіи AB, найдемъ, что при пересѣченіи этой линіи DE съ AC получится прямой уголъ, опирающійся на линію AD, которая будетъ гипотенузой для составленнаго такимъ образомъ треугольника. Если мы, принявъ AD за діаметръ, опишемъ окружность, то она пройдетъ черезъ вершину прямого угла, которая будетъ находиться на линіи AC, а потому никогда не пересѣчетъ линію DE въ точкѣ E. Слѣдовательно, чертежъ неправиленъ.

186. Неправильный чертежъ. Дѣйствительно, возставивъ изъ точки A перпендикуляръ къ линіи AB, найдемъ, что этотъ перпендикуляръ при пересѣченіи съ линіей CD даетъ прямой уголъ, черезъ вершину котораго и пройдетъ описанная на AM, какъ на діаметрѣ, окружность.

187. См. опроверженіе софизма № 183.

Дѣйствительно, такъ какъ сумма длинъ безконечно-малыхъ окружностей постоянна, то она и въ предѣлѣ равна $2\pi R$. Пусть ΔC длина малой окружности, ΔR соотвѣтствующій безконечно-малый радіусъ. Какъ бы ни была такая окружность мала всегда имѣемъ:

$$\frac{\Delta C}{2\Delta R}=\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

т.-е.

$$\Delta C=2\pi\Delta R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Отсюда видимъ, что эта безконечно-малая окружность никогда не будетъ равна своему діаметру $2\Delta R$, что слѣдовало бы изъ конечнаго результата нашего софизма.

188. Накладывая треугольникъ $A_1B_1C_1$ на четыреугольникъ $MNPQ$ (трапецію), мы увидимъ, что линіи A_1B_1 и B^1C^1 не будутъ служить продолженіями линій MN и PQ, а слѣдовательно, фигура $RKSLT$ не будетъ треугольникомъ.

Дѣйствительно, если бы фигура $RKSLT$ была треугольникомъ, то въ подобныхъ треугольникахъ RST и KSL основанія относились бы какъ высоты, т.-е.

$$RT : KL = SV : SW \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$10 : 6 = 13 : 8 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Но мы видимъ, что выраженіе (2) равенствомъ быть не можетъ. Слѣдовательно, фигура $RKSLT$ не есть треугольникъ, а потому площадь ея нельзя вычислять по формулѣ площади для треугольника, а надо брать сумму площадей фигуръ: $RKLT$ и KSL.

189. Формула (3) даетъ намъ:

$$\square ABCD = 2AD + 2DC.$$

Какъ бы мы не дѣлили линіи AD и DC, сумма всѣхъ безконечно-малыхъ равныхъ отрѣзковъ линій AD и DC всегда будетъ составлять эти самыя линіи, т.-е. AD и DC, другими словами, всегда будетъ сохраняться равенство (3). Ошибка въ томъ, что мы сумму безконечно-малыхъ отрѣзковъ линіи AD принимаемъ равной нулю, тогда какъ она равна все время AD.

Тригонометрія.

190. Пусть $\operatorname{tg} x = z$, и $\operatorname{tg} y = s$, тогда имѣемъ систему:

$$\lg_s z - \lg_s s = \tfrac{8}{3} \text{ и } zs = 16 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Пусть

$$\lg_s z = m \text{ и } \lg_z s = n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

тогда

$$s^m = z \text{ и } z^n = s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

откуда

$$(z^n)^m = z \text{ или } z^{mn} = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

что даетъ

$$mn = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

или

$$\lg_s z \,.\, \lg_z s = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

откуда

$$\lg_s z = \frac{1}{\lg_z s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Вставляемъ въ ур-іе (1) вмѣсто $\lg_z z$ его значеніе, тогда:

$$\frac{1}{\lg_z s} - \lg_z s = \frac{8}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

или $$1 - \lg_z^2 s = \frac{8}{3}\lg_z s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

или $$\lg_z^2 s + \frac{8}{3}\lg_z s - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

откуда $$\lg_z s = -\frac{8}{6} \pm \frac{10}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Что даетъ

$$\lg_z s = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \lg_z s = -3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Пользуясь формулой (7), находимъ, что тогда

$$\lg_s z = 3 \quad \text{или} \quad \lg_s z = -\frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Изъ равенствъ (12) и (13) имѣемъ:

или $$z^{\frac{1}{3}} = s, \quad \text{тогда} \quad s^3 = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

или $$z^{-3} = s; \quad \text{тогда} \quad s^{-\frac{1}{3}} = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Вставляемъ значенія s и z въ ур-іе $zs = 16$; имѣемъ:

при $z = s^3$ $$s^3 s = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

или $$s^4 = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

откуда $$s = \sqrt[4]{16} = \pm 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

(Остальные корни мы опускаемъ, иначе, для ихъ нахожденія надо рѣшить двучленное ур-іе: $s^4 - 16 = 0$.)

при $z = s^{-\frac{1}{3}}$

$$s^{-\frac{1}{3}} s = 16$$

или $$s : s^{\frac{1}{3}} = 16 \quad \text{или} \quad \frac{s}{\sqrt[3]{s}} = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

или $$\sqrt[3]{\frac{s^3}{s}} = 16 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{s^2} = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

откуда $$s^2 = 16^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

слѣдовательно $$s = \sqrt{2^{12}} = \pm 2^6 = \pm 64 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Итакъ, имѣемъ:

$$s = \operatorname{tg} y = \pm 2 \quad \text{или} \quad s = \operatorname{tg} y = \pm 64 \quad \ldots (23)$$

тогда $$z = \operatorname{tg} x = \pm 8 \quad \text{или} \quad z = \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{4} \quad \ldots\ldots (24)$$

Если бы мы рѣшали двучленное ур-ie $s^4-16=0$, то имѣли бы еще 2 корня.

$$\operatorname{tg} x=\pm 8i, \quad \text{тогда} \quad \operatorname{tg} y=\mp 2i.$$

Отвѣтъ:
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \operatorname{tg} y= & +2 & -2 & +64 & -64 & +8i & -8i \\ \hline \operatorname{tg} x= & +8 & -8 & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -2i & +2i \\ \hline\end{array}.$$

191. Мы знаемъ, что

$$\operatorname{ctg} a=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Пусть $a=\operatorname{tg} x$, тогда

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x\right) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или, такъ какъ по условію задачи

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

то
$$\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x\right) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

но если тангенсы равны, то и углы равны, слѣд.

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

или
$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x. \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или
$$1=\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

или
$$\operatorname{tg}^2 x-\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x+1=0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Откуда
$$\operatorname{tg} x=\frac{\pi}{4}\pm\sqrt{\frac{\pi^2-16}{16}}=\frac{\pi\pm\sqrt{(\pi+4)(\pi-4)}}{4} \quad \ldots\ldots (9)$$

192. Имѣемъ:

$$\operatorname{sn}^3 x+\operatorname{cs}^3 x=(\operatorname{sn} x+\operatorname{cs} x)(\operatorname{sn}^2 x-\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x+\operatorname{cs}^2 x) \quad \ldots (1)$$

или
$$\operatorname{sn}^3 x+\operatorname{cs}^3 x=m(1-\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

но
$$\operatorname{sn}^3 x+\operatorname{cs}^3 x=n \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Слѣдовательно,
$$m(1-\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x)=n \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

откуда
$$\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x=1-\frac{n}{m} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Возводя ур-ie $\operatorname{sn} x+\operatorname{cs} x=m$ въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+2\operatorname{sn} x \operatorname{cs} x=m^2 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

или
$$1+2\left(1-\frac{n}{m}\right)=m^2. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Откуда искомая зависимость будетъ:

$$3m=m^3+2n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

193. Преобразуемъ нашъ многочленъ слѣдующимъ образомъ:

$$(\mathrm{cs}\,11\alpha+\mathrm{cs}\,5\alpha)+3(\mathrm{cs}\,9\alpha+\mathrm{cs}\,7\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или $$2\,\mathrm{cs}\,\frac{11\alpha+5\alpha}{2}\,\mathrm{cs}\,\frac{11\alpha-5\alpha}{2}+3\,.\,2\,\mathrm{cs}\,\frac{9\alpha+7\alpha}{2}\,\mathrm{cs}\,\frac{9\alpha-7\alpha}{2} \quad \ldots \quad (2)$$

или $$2\,\mathrm{cs}\,8\alpha\,\mathrm{cs}\,3\alpha+6\,\mathrm{cs}\,8\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или, вынося $2\,\mathrm{cs}\,8\alpha$ за скобку

$$2\,\mathrm{cs}\,8\alpha(\mathrm{cs}\,3\alpha+3\,\mathrm{cs}\,\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или $$2\,\mathrm{cs}\,8\alpha\,[\mathrm{cs}\,(2\alpha+\alpha)+3\,\mathrm{cs}\,\alpha] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Но

$$\mathrm{cs}(2\alpha+\alpha)=\mathrm{cs}\,2\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha-\mathrm{sn}\,2\alpha\,\mathrm{sn}\,\alpha=(\mathrm{cs}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\alpha)\,\mathrm{cs}\,\alpha-2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha. \quad (6)$$

или, далѣе

$$\mathrm{cs}\,(2\alpha+\alpha)=\mathrm{cs}^3\,\alpha-(1-\mathrm{cs}^2\,\alpha)\,\mathrm{cs}\,\alpha-2\,\mathrm{cs}\,\alpha(1-\mathrm{cs}^2\,\alpha)=$$
$$=\mathrm{cs}^3\,\alpha-\mathrm{cs}\,\alpha+\mathrm{cs}^3\,\alpha-2\,\mathrm{cs}\,\alpha+2\,\mathrm{cs}^3\,\alpha=4\,\mathrm{cs}^3\,\alpha-3\,\mathrm{cs}\,\alpha \quad . \quad (7)$$

Вставляя значеніе $\mathrm{cs}\,3\alpha$ изъ (7) въ выраженіе (5), имѣемъ:

$$2\,\mathrm{cs}\,8\alpha(4\,\mathrm{cs}^3\,\alpha-3\,\mathrm{cs}\,\alpha+3\,\mathrm{cs}\,\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

или $$8\,\mathrm{cs}^3\,\alpha\,\mathrm{cs}\,8\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Отвѣтъ: $8\,\mathrm{cs}^3\,\alpha\,\mathrm{cs}\,8\alpha$.

194. Преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{(1+\mathrm{cs}\,3x)+(\mathrm{cs}\,x+\mathrm{cs}\,2x)}{\mathrm{cs}\,x-(1-\mathrm{cs}^2\,x-\mathrm{cs}^2\,x)}=\frac{2\,\mathrm{cs}^2\,\frac{3x}{2}+\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}\,\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{cs}\,x-(\mathrm{sn}^2\,x-\mathrm{cs}^2\,x)}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}\left(\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}+\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{cs}\,x+\mathrm{cs}^2\,x-\mathrm{sn}^2\,x}=\frac{2\,\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}\left(\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}+\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{cs}\,x+\mathrm{cs}\,2x}=$$

$$\frac{2\,\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}\left(2\,\mathrm{cs}\,x\,\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{cs}\,\frac{3x}{2}\,\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}}=\frac{2\,\mathrm{cs}\,x\,\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{cs}\,\frac{x}{2}}=2\,\mathrm{cs}\,x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Отвѣтъ: $2\,\mathrm{cs}\,x$.

195. Пишемъ производную пропорцію:

$$\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y+\mathrm{tg}\,z}{a+b+c}=\frac{\mathrm{tg}\,x}{a}=\frac{\mathrm{tg}\,y}{b}=\frac{\mathrm{tg}\,z}{c} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

но $(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)+\operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{sn}(x+y)}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y}+\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} z}=\frac{\operatorname{sn}(x+y)\operatorname{cs} z+\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}=$

$=\frac{\operatorname{sn}(180-z)\operatorname{cs} z+\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}=\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cs} z+\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}=$

$=\frac{\operatorname{sn} z(\operatorname{cs} z+\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y)}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}$;

но $\operatorname{cs} z=-\operatorname{cs}(x+y)=\operatorname{sn} x \operatorname{sn} y-\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y$;

подставляя, получимъ:

$$\frac{\operatorname{sn} z(\operatorname{sn} x \operatorname{sn} y-\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y+\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y)}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}=\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y}{\operatorname{cs} x \operatorname{cs} y \operatorname{cs} z}=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \quad (2)$$

Подставляемъ значеніе $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z$ изъ выраженія (2) въ выраженіе (1); имѣемъ:

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}{a+b+c}=\frac{\operatorname{tg} x}{a}=\frac{\operatorname{tg} y}{b}=\frac{\operatorname{tg} z}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отсюда имѣемъ 3 ур-ія. Рѣшая каждое въ отдѣльности, имѣемъ:

$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=\frac{a+b+c}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} z=\frac{a+b+c}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\frac{a+b+c}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Перемножая ур-ія (6) и (5), имѣемъ:

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=\frac{(a+b+c)^2}{bc} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Вставляя значеніе $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$ изъ ур-ія (4), имѣемъ:

$$\operatorname{tg} x=\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Такимъ же образомъ:

$$\operatorname{tg} y=\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} z=\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

196. Разлагаемъ

$$\operatorname{sn} 2\alpha=2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cs} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Такъ какъ $\operatorname{cs}\alpha$ всегда правильная дробь, то $2\operatorname{sn}\alpha$, будучи умножено на $\operatorname{cs}\alpha$, уменьшится.

Слѣдовательно, $2\operatorname{sn}\alpha > \operatorname{sn} 2\alpha$.

Отвѣтъ: $2\operatorname{sn}\alpha > \operatorname{sn} 2\alpha$.

197. Пусть $a-x=\varepsilon$, гдѣ ε есть безконечно малая величина. Тогда имѣемъ:

$$\frac{a\pi}{b}\operatorname{sn}\frac{\varepsilon}{b}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(a-\varepsilon)=\frac{a\pi}{b}\operatorname{sn}\frac{\varepsilon}{b}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\varepsilon}{2a}\right)=\frac{a\pi}{b}\operatorname{sn}\frac{\varepsilon}{b}\operatorname{ctg}\frac{\pi\varepsilon}{2a}=$$

$$=\frac{a\pi}{b}\operatorname{sn}\frac{\varepsilon}{b}\cdot\frac{\operatorname{cs}\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}{\operatorname{sn}\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}=\frac{a\pi}{b}\cdot\left[\frac{\operatorname{sn}\dfrac{\varepsilon}{b}}{\dfrac{\varepsilon}{b}}\right]\cdot\frac{\varepsilon}{b}\cdot\frac{\operatorname{cs}\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}{\left[\dfrac{\operatorname{sn}\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}{\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}\right]\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}}=\frac{a\pi}{b}\cdot\frac{\varepsilon}{b}\cdot\frac{2a}{\pi\varepsilon}=\frac{2a^2}{b^2}. \quad (1)$$

такъ какъ $\lim\dfrac{\operatorname{sn}\alpha}{\alpha}=1$ и $\lim\operatorname{cs}\dfrac{\pi\varepsilon}{2a}=1$ (при $\varepsilon=0$).

Отвѣтъ: $\dfrac{2a^2}{b^2}$.

198. Пусть $\operatorname{arc}\operatorname{sn} x=y$; отсюда $\operatorname{sn} y=x$; дѣля обѣ части выраженія $\operatorname{sn} y=x$ на $\sqrt{3}$, имѣемъ:

$$\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{3}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Послѣ чего данное ур-ie принимаетъ видъ:

$$y+\operatorname{arc}\operatorname{sn}\left(\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

или

$$\operatorname{arc}\operatorname{sn}\left(\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}-y \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Откуда

$$\frac{\operatorname{sn} y}{\sqrt{3}}=\operatorname{sn}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\operatorname{cs} y \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Отсюда имѣемъ:

$$\operatorname{tg} y=\sqrt{3}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Но, если $\operatorname{tg} y=\sqrt{3}$, то $\operatorname{sn} y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, но $\operatorname{sn} y=x$, слѣдовательно,

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Отвѣтъ: $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

199. Имѣемъ:

$$\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,sn} x+\operatorname{arc\,cs} x)=$$
$$=\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,sn} x)\operatorname{cs}(\operatorname{arc\,cs} x)+\operatorname{cs}(\operatorname{arc\,sn} x)\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,cs} x). \quad . \quad (1)$$

но
$$\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,sn} x)=x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

потому что, если $\operatorname{arc\,sn} x=y$, то $\operatorname{sn} y=x$, а это и будетъ равенство (2), если мы вмѣсто $\operatorname{arc\,sn} x$ подставимъ y.

$$\operatorname{cs}(\operatorname{arc\,cs} x)=x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Дѣйствительно, пусть $\operatorname{arc\,cs} x=y$, тогда $\operatorname{cs} y=x$.

$$\operatorname{cs}(\operatorname{arc\,sn} x)=\sqrt{1-x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Дѣйствительно, пусть $\operatorname{arc\,sn} x=y$, тогда $\operatorname{sn} y=x$,

но
$$\operatorname{cs} y=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

Такимъ же образомъ:

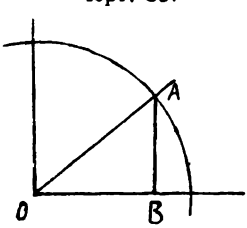
$$\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,cs} x)=\sqrt{1-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Послѣ этого выраженіе (1) принимаетъ видъ:

$$\operatorname{sn}(\operatorname{arc\,sn} x+\operatorname{arc\,cs} x)=x\,.\,x+\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-x^2}=x^2+1-x^2=1. \quad (1)$$

Отвѣтъ: 1.

Черт. 33.



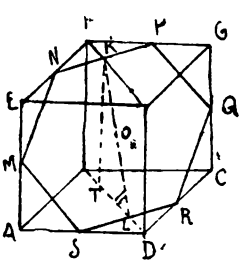
200. Въ любой четверти для одного и того же угла имѣемъ:

$$AB+OB>OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Дѣля обѣ части на радіусъ, получимъ:

$$\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{cs}\alpha>1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Черт. 34.



201. Кубъ долженъ быть разсѣченъ плоскостью такъ, какъ указано на чертежѣ. По условію задачи надо опредѣлить уголъ KLB. Обозначимъ его черезъ φ и пусть ребро куба будетъ a. Тогда NP изъ треугольника NFP будетъ равно $\sqrt{NF^2+FP^2}$, или

$$NP=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{2} \quad (1)$$

такъ какъ ребра куба въ точкахъ M, N, P и т. д. раздѣлены пополамъ. OP какъ радіусъ правильнаго шестиугольника равенъ сторонѣ этого шестиугольника, т.-е.

$$OP=NP=\frac{a}{2}\sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Откуда, изъ треугольника OKP, имѣемъ:

$$OK=\sqrt{OP^2-KP^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}}=\sqrt{\frac{6a^2}{16}}=\frac{a}{4}\sqrt{6} \quad . \quad (3)$$

Далѣе изъ треугольника KLT имѣемъ:

$$KT=KL\,\mathrm{sn}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Но $$KT=BF=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

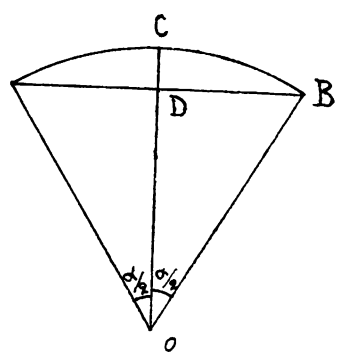
Откуда находимъ:

$$\mathrm{sn}\,\varphi=\frac{KT}{KL}=\frac{a}{\frac{a}{4}\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Отвѣтъ: $\mathrm{sn}\,\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

202. Пусть $ACBO$ искомый секторъ. Обозначимъ уголъ AOB черезъ φ. По условію задачи, поверхность сферы ACB равновелика поверхности (боковой) конуса AOB.

Черт. 35.



Поверхность ACB есть боковая поверхность сферическаго сегмента, слѣдовательно, она равна $2\pi RH$, гдѣ R — радіусъ шара и $H=CD$. Но

$$H=CD=CO-DO=R-DO \quad (1)$$

а $$DO=AO\,\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

изъ треугольника ADO. Слѣдовательно, поверхность ACB равна $2\pi R\left(R-R\,\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{2}\right)$. Поверхность же конуса равна πrl, гдѣ

$$r=AD=R\,\mathrm{sn}\,\frac{\varphi}{2} \text{ (изъ } \triangle\text{-ка } ADO) \text{ и } l=R. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Слѣдовательно, поверхность конуса будетъ

$$\pi R^2\,\mathrm{sn}\,\frac{\varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Итакъ, $$2\pi R^2\left(1-\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{2}\right)=\pi R^2\,\mathrm{sn}\,\frac{\varphi}{2}=2\pi R^2\,\mathrm{sn}\,\frac{\varphi}{4}\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

или $$1-\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{2}=\mathrm{sn}\,\frac{\varphi}{4}\mathrm{cs}\,\frac{\varphi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

но $$1-\operatorname{cs}\frac{\varphi}{2}=2\operatorname{sn}^2\frac{\varphi}{4}. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, $$2\operatorname{sn}^2\frac{\varphi}{4}=\operatorname{sn}\frac{\varphi}{4}\operatorname{cs}\frac{\varphi}{4}. \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

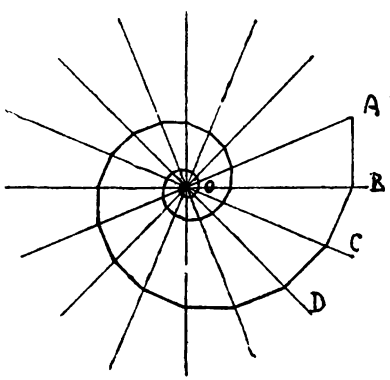
Откуда $$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}=\frac{1}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

По таблицамъ находимъ уголъ φ.

Отвѣтъ: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}=\frac{1}{2}$.

203. Пусть $OA=a$. Такъ какъ n прямыхъ линій образуютъ равные углы, то каждый уголъ, напр. AOB, будетъ равенъ $\frac{360}{n}$ градусамъ. Длину AB найдемъ изъ треугольника AOB: $AB=a\operatorname{sn}\frac{360}{n}$ и $OB=a\operatorname{cs}\frac{360}{n}$.

Черт. 36.



Изъ треугольника BOC имѣемъ:

$$BC=\left(a\operatorname{cs}\frac{360}{n}\right)\operatorname{sn}\frac{360}{n}$$

и

$$OC=\left(a\operatorname{cs}\frac{360}{n}\right)\operatorname{cs}\frac{360}{n}=a\operatorname{cs}^2\frac{360}{n}.$$

Изъ треугольника COD имѣемъ:

$$CD=\left(a\operatorname{cs}^2\frac{360}{n}\right)\operatorname{sn}\frac{360}{n} \quad \text{и т. д.}$$

Слѣдовательно, искомая длина линіи $ABCD\ldots$ равная L, будетъ:

$$L=AB+BC+CD+\cdots=a\operatorname{sn}\frac{360}{n}+a\operatorname{cs}\frac{360}{n}\cdot\operatorname{sn}\frac{360}{n}+$$

$$+a\operatorname{cs}^2\frac{360}{n}\operatorname{sn}\frac{360}{n}+\cdots$$

или $$L=a\operatorname{sn}\frac{360}{n}\left(1+\operatorname{cs}\frac{360}{n}+\operatorname{cs}^2\frac{360}{n}+\operatorname{cs}^3\frac{360}{n}+\cdots\right). \quad (1)$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, есть сумма безконечно убывающей геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $\operatorname{cs}\frac{360}{n}$ и первымъ членомъ 1. Вычисляемъ эту сумму по формулѣ:

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\operatorname{cs}\frac{360}{n}}=\frac{1}{2\operatorname{sn}^2\frac{180}{n}}.$$

Отсюда длина L выразится:

$$L=a\,\mathrm{sn}\,\frac{360}{n}\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{sn}^2\frac{180}{n}}=\frac{a\,\mathrm{sn}\,2\cdot\frac{180}{n}}{2\,\mathrm{sn}^2\frac{180}{n}}=\frac{a\,2\,\mathrm{sn}\frac{180}{n}\,\mathrm{cs}\,\frac{180}{n}}{2\,\mathrm{sn}^2\frac{180}{n}}=$$

$$=\frac{a\,\mathrm{cs}\,\frac{180}{n}}{\mathrm{sn}\,\frac{180}{n}}=a\,\mathrm{ctg}\,\frac{180}{n}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Отвѣтъ: $a\,\mathrm{ctg}\,\frac{180}{n}$.

204. Изъ неравенства (2) имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sn}\,\alpha>-\mathrm{sn}\,\alpha\\ \mathrm{cs}\,\alpha>-\mathrm{cs}\,\alpha\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

такъ какъ $\mathrm{sn}\,(\pi+\alpha)=-\mathrm{sn}\,\alpha$ и $\mathrm{cs}\,(\pi+\alpha)=-\mathrm{cs}\,\alpha$. Перемножать же два такихъ неравенства, оставляя знакъ неравенства прежнимъ, мы не имѣемъ права. (См. № 142.)

205. Переходъ отъ равенства (7) къ равенству (8) неправиленъ. Дѣйствительно, изъ равенства (1) видимъ, что

$$\mathrm{sn}\,\frac{\pi}{4}-\mathrm{cs}\,\frac{\pi}{4}=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

но, какъ извѣстно изъ алгебры, на нуль сокращать нельзя.

206. Такъ какъ $\mathrm{sn}\,\frac{\pi}{6}$ такъ же, какъ и синусы любыхъ угловъ меньше единицы, то логариѳмъ синуса будетъ всегда отрицательнымъ (логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы отрицательны). Слѣдовательно, умножая лѣвую часть равенства (2) на 2, мы должны въ неравенствѣ (3) поставить знакъ неравенства обратный, т.-е. написать:

$$2\,\lg\mathrm{sn}\,\frac{\pi}{6}>\lg\mathrm{sn}\,\frac{\pi}{6}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(a)$$

207. Равенство (4) невѣрно. Изъ тригонометріи извѣстно, что

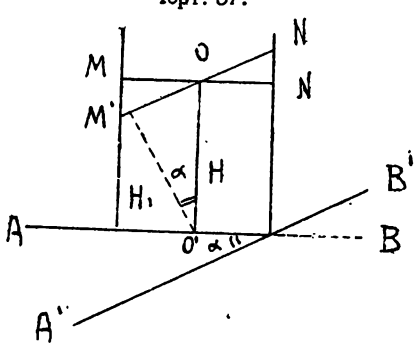
$$\mathrm{cs}\,(-\alpha)=\mathrm{cs}\,\alpha\quad\ldots\ldots\ldots\quad(a)$$

но $-\mathrm{cs}\,\alpha$ не равенъ, ни $\mathrm{cs}\,(-\alpha)$, ни $\mathrm{cs}\,\alpha$. Слѣдовательно, подставлять вмѣсто $(-\mathrm{cs}\,\alpha)$ выраженіе $[\mathrm{cs}(-\alpha)]$ мы не имѣемъ права.

Физика.

208. При вертикальномъ положеніи ведра давленіе на его дно измѣряется вѣсомъ цилиндрическаго столба жидкости (принимая ведро за цилиндръ), имѣющаго основаніемъ площадь основанія цилиндра, а высотою разстояніе уровня жидкости отъ основанія цилиндра. Обозначая площадь основанія черезъ S, высоту площади черезъ H и плотность черезъ d, мы должны выразить давленіе жидкости на дно цилиндра при вертикальномъ его положеніи произведеніемъ SHd.

Черт. 37.



Если цилиндръ будетъ наклоненъ, то давленіе жидкости на дно выразится произведеніемъ площади дна на разстояніе его центра тяжести отъ уровня жидкости и на плотность жидкости, т.-е. опять произведеніемъ вида SH_1d, гдѣ H_1 есть искомое разстояніе; центръ тяжести круглаго дна совпадаетъ съ центромъ круга. Изъ чертежа видимъ, что $H \perp MN$ и AB, а $H_1 \perp M_1N_1$ и A_1B_1. Наклонъ дна къ линіи A_1B_1 измѣряется угломъ α; $\angle OO_1M' = \alpha$, такъ какъ $OO_1 \perp AB$ и $M_1O_1 \perp A_1B_1$. Изъ треугольника OO_1M_1 имѣемъ: $H_1 = H \cos \alpha$; это отношеніе вѣрно при всѣхъ положеніяхъ цилиндра, при условіи, если дно покрыто водой. Отсюда искомое давленіе будетъ:

$$P = SHd \cos \alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отвѣтъ: $SHd \cos \alpha$.

209. Пусть вѣсъ находившагося въ коронѣ золота будетъ x, тогда вѣсъ серебра $(10-x)$. По закону Архимеда всякое тѣло, погруженное въ жидкость теряетъ въ своемъ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ вытѣсненная имъ жидкость, кромѣ того, изъ условій задачи видимъ, что вода легче золота въ 19,25 раза, а серебро въ 10,5 раза. Откуда заключаемъ, что золото въ водѣ теряетъ $\frac{x}{19{,}25}$ кгр., а серебро $\frac{10-x}{10{,}5}$ кгр. Корона же въ воздухѣ

вѣсила 10 кгр., а въ водѣ 93,55% своего вѣса, откуда заключаемъ, что такъ какъ каждый килограммъ вѣсилъ въ водѣ $\frac{93,55}{100}$ своего вѣса, и такъ какъ 10 кгр. будутъ вѣсить $\frac{10.93,55}{100}=9,355$ кгр., то корона потеряетъ въ вѣсѣ $10-9,355=0,645$ кгр. По условію задачи, имѣемъ:

$$\frac{x}{19,25}+\frac{10-x}{10,5}=0,645 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Откуда $x=7,1005$ кгр.

Отвѣтъ: 7,1005 золота и 2,9995 серебра.

210. Пусть термометръ Реомюра, висѣвшій въ магазинѣ, показывалъ x градусовъ. При тѣхъ же условіяхъ термометръ Цельсія долженъ показывать $\frac{5}{4}x$ градусовъ, а термометръ Фаренгейта $32+\frac{9}{4}x°$. Пусть число градусовъ Цельсія было y, тогда, по условію задачи, температура въ магазинѣ была вдвое больше числа термометровъ Цельсія, т.-е.

$$x=2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Съ другой стороны, термометровъ Реомюра было 10 и каждый показывалъ $x°$, слѣдовательно, всѣ термометры Реомюра показывали $10x°$. Если число градусовъ Цельсія было y, и каждый показывалъ $\frac{5}{4}x°$, то всѣ термометры Цельсія показывали $\frac{5}{4}xy°$; Такъ какъ всего термометровъ Цельсія и Фаренгейта было $20-10=10$, а термометровъ Цельсія y, то термометровъ Фаренгейта было $10-y$, а такъ какъ каждый показывалъ $(32+\frac{9}{4}x)°$, то всѣ термомерты Фаренгейта покажутъ $(32+\frac{9}{4}x)(10-y)$ градусовъ.

По условію задачи имѣемъ:

$$10x+\frac{5}{4}xy+(32+\frac{9}{4}x)(10-y)=453 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Упростивъ его и принимая во вниманіе ур-іе (1), находимъ:

$$y=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Слѣдовательно, $x=2y=14$.

Отвѣтъ: 14^0.

211. Пусть искомое число градусовъ на термометрахъ Реомюра и Фаренгейта будетъ $x°$. Если по Реомюру показываетъ $x°$,

то по Фаренгейту будетъ показывать: $(\frac{9}{4}x+32)°$. По условію задачи, термометры показываютъ одно и то же число градусовъ, т.-е.

$$x=\frac{9}{4}x+32 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отсюда имѣемъ, что искомая температура будетъ:

$$x=-25{,}6°.$$

Отвѣтъ: $-25{,}°6$.

212. Пусть длины плечъ коромысла будутъ a и b, и пусть p будетъ вѣсъ, требуемый покупателями, q — вѣсъ товара, полученный первымъ покупателемъ и q_2 — вѣсъ товара, полученнаго другимъ покупателемъ, тогда:

$$p:q=a:b \quad \text{и} \quad p:q_2=b:a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отсюда имѣемъ:

$$q=p\cdot\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad q_2=p\cdot\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или

$$q+q_2=p\frac{b}{a}+p\frac{a}{b}=p\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Но $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$ всегда больше 2*). Слѣдовательно,

$$q+q_2>2p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Отвѣтъ: потерялъ.

213. Пусть a и b суть плечи вѣсовъ и x вѣсъ тѣла. Если на одной чашкѣ положенъ грузъ x, а на другой въ 16 фунтовъ, то

$$a:b=x:16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если же на ту чашку вѣсовъ, гдѣ былъ положенъ грузъ въ 16 фунтовъ, положить x, то этотъ грузъ уравновѣсится 9 фунтами на другой чашкѣ, и мы будемъ имѣть:

$$a:b=9:x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Откуда:

$$x:16=9:x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или

$$x^2=16\cdot 9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Что даетъ:

$$x=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Отвѣтъ: 12 фунтовъ.

214. Пусть разстояніе искомой точки отъ лампы будетъ x, то ея разстояніе отъ свѣчи будетъ $(31{,}9-x)$. Такъ какъ сила свѣта обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ освѣ-

---

*) Дѣйствительно, пусть $a>b$. Тогда $a-b>0$, или $(a-b)^2>0$, или $a^2+b^2>2ab$, или $\frac{a^2+b^2}{ab}>2$, или $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)>2$. Полагая $b>a$, придемъ къ тому же результату.

щаемой поверхности, то яркость освѣщенія лампой искомой точки будетъ:

$$J=\frac{400}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

а яркость свѣта будетъ: $J_1=\frac{81}{(31{,}9-x)^2}$ . . . . . (2)

По условію задачи $J=J_1$, слѣдовательно,

$$400 : x^2=81 : (31{,}9-x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или $$400(31{,}9-x)^2=81x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ:

$$20(31{,}9-x)=9x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Откуда $$x=22 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Отвѣтъ: точка находится на разстояніи 22 арш. отъ лампы.

215. Надо каждый изъ брусковъ поднести къ нейтральной линіи другого.

216. Оно останется въ томъ же положеніи, такъ какъ никакія силы внутри земли дѣйствовать не будутъ, потому что каждой точкѣ земляного слоя соотвѣтствуетъ симметричная точка, парализующая притягательную силу первой точки*).

217. Будетъ perpetuum mobile. Въ срединѣ просверленнаго отверстія притягательныхъ силъ не будетъ, но, коль скоро тѣло пролетитъ чрезъ центръ и будетъ находиться на противоположной сторонѣ, то, подъ вліяніемъ притягательныхъ силъ земли, дойдя до опредѣленной высоты равномѣрно-замедленнымъ движеніемъ (считая съ момента, когда тѣло поравнялось съ поверхностью земли), оно вернется обратно и т. д.

218. Лучъ падающій съ перпендикуляромъ въ точкѣ паденія, какъ видно изъ условій задачи, образуетъ уголъ $\frac{\beta}{2}$; какъ скоро зеркало будетъ повернуто на уголъ α, лучъ падающій съ перпендикуляромъ въ точкѣ паденія будетъ составлять уголъ $\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)$ (что можно увидѣть, построивъ чертежъ). Слѣдовательно, уголъ между лучами будетъ: $\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)+\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)=\beta+2\alpha$.

Отвѣтъ: $\beta+2\alpha$.

---

*) Строго доказывается при помощи высшей математики, такъ же, какъ и № 217.

219. Нельзя, потому что жидкость въ трубкѣ, не будучи поддерживаема давленіемъ воздуха, тотчасъ же распадется на двѣ части.

220. Нельзя, потому что при поднятіи поршня уменьшится давленіе на жидкость (воду), температура кипѣнія понизится и увеличенное пространство наполнится парами, слѣдовательно, уровень жидкости не повысится.

221. Нельзя, потому что токъ спирали перемѣнный, а, слѣдовательно, сталь, будучи въ первый моментъ намагничена, въ слѣдующій размагнитится и т. д.

222. Давленіе на дно не измѣнится, такъ какъ уровень жидкости будетъ на той же высотѣ, а давленіе жидкости не зависитъ отъ формы сосуда, а лишь отъ основанія сосуда и высоты жидкости.

223. Легче опрокинуть возъ съ соломой, потому что центръ тяжести будетъ находиться выше, чѣмъ центръ тяжести воза съ кирпичемъ.

224. Нѣтъ. Летя со скоростью, большей скорости свѣта, мы ничего не увидимъ, такъ какъ лучи не будутъ достигать нашего зрѣнія.

225. Малое колесо радіуса r движется не самостоятельно, а въ зависимости отъ движенія большого колеса. Двигаясь самостоятельно, т.-е. не будучи скрѣплено наглухо съ большимъ колесомъ, оно прошло бы разстояніе πr раньше, чѣмъ большое колесо перемѣстилось во второе положеніе, и приняло бы изображенное на чертежѣ положеніе не въ точкѣ C^1, а раньше (между точками B и C^1). Находясь же въ зависимости отъ движенія большого колеса, малое, пройдя пространство πr вращаясь и подчиняясь движенію большого колеса, проскользитъ по линіи BC^1 нѣкоторое время на разстояніи $\pi R - \pi r = \pi(R-r)$, при чемъ это скользящее движеніе распредѣлится пропорціонально пройденному разстоянію πr. Слѣдовательно, въ данномъ софизмѣ необходимо считаться съ тѣмъ, что движеніе малаго колеса не самостоятельно, а потому длину линіи BC^1 никакъ нельзя считать равной πr.

А. А. ЛЯМИНЪ.

Математическіе досуги.

КНИГА ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.

Изданіе 2-ое.

Изданіе А. С. ПАНАФИДИНОЙ.
МОСКВА. Лялинъ пер., соб. д. || ПЕТРОГРАДЪ, Итальянская, 29.
1915.

МОСКВА.
Тип. Т-ва Рябушинскихъ, Страстной бул., Путинковскій п., с. д.
1 9 1 5.

Оглавленіе.

	стр.
Предисловіе	3—4
Краткій очеркъ изъ исторіи математики	5—18
Ариѳметика (№№ 1—38)	19—38
Алгебра (№№ 39—112)	39—79
Геометрія (№№ 113—138)	80—99
Тригонометрія (№№ 139—154)	100—109
Физика (№№ 155—173)	110—134

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемый сборникъ является попыткой собрать въ одно цѣлое лучшія изъ тѣхъ разнообразныхъ и интересныхъ задачъ, которыя частью разбросаны въ многочисленныхъ учебникахъ, задачникахъ и журналахъ, а частью просто передаются устно.

Подобнаго рода задачи рѣзко отличаются отъ задачъ, наполняющихъ различные задачники или странно-заданнымъ условіемъ, или нѣкоторой красотой разсужденія и изяществомъ рѣшенія задачи, или непредвидѣннымъ отвѣтомъ или же нѣкоторой искусственностью рѣшенія.

Всѣ задачи для удобства разбиты на отдѣлы (ариѳметика, алгебра, геометрія, тригонометрія и физика) и расположены, по возможности, въ строгой послѣдовательности.

Кромѣ того, въ концѣ отдѣловъ помѣщены наиболѣе интересные, соотвѣтствующіе этому отдѣлу, софизмы.

Задачи сопровождаются рѣшеніями, а софизмы—разъясненіями.

Этотъ сборникъ въ первомъ своемъ изданіи былъ озаглавленъ «*Математическіе парадоксы и интересныя задачи для любителей математики*». Въ настоящемъ, второмъ изданіи матеріалъ сборника былъ тщательно просмотрѣнъ, переработанъ и измѣненъ.

Въ трудномъ дѣлѣ переработки сборника большое участіе приняли А. М. Бабадъ и С. Я. Турлыгинъ, которымъ составитель приноситъ глубокую благодарность.

Матеріаломъ при составленіи сборника служили, главнымъ образомъ, слѣдующія книги:

Ващенко-Захарченко. Исторія математики.
«Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики».
Горячевъ и Воронецъ. Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики.
Обреимовъ. Математическіе софизмы.
Люкасъ. Математическія развлеченія.
Journal de mathématiques élémentaires.
Приложенія къ журналу «Нива»,
и многія другія.

Краткій очеркъ изъ исторіи математики.

Исторія науки вообще есть и исторія прогресса; несмотря на то, что въ исторіи умственнаго развитія мы встрѣчаемъ временами застой, все-таки при опредѣленной высотѣ культуры умственныя пріобрѣтенія отличаются значительной прочностью.

При бѣгломъ взглядѣ на историческое развитіе математическихъ знаній, нетрудно видѣть, что иной разъ почти одновременно это развитіе идетъ то съ видимымъ преобладаніемъ индуктивнаго метода, то разрастается въ способность терпѣливаго наблюденія и собиранія фактовъ, съ преобладаніемъ дедукціи; поэтому нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что понадобилось много вѣковъ на то, чтобы собрать въ одно цѣлое ту массу отрывочныхъ познаній, которую постепенно пріобрѣталъ человѣческій разумъ.

Математическія науки такъ же, какъ и другія многія области знанія, обязаны своимъ происхожденіемъ различнымъ теченіямъ человѣческой мысли, при чемъ одной изъ самыхъ главныхъ причинъ возникновенія примитивныхъ представленій въ области математики считаютъ образовавшееся постепенно понятіе о числѣ и мѣрѣ, лежащее въ основѣ какъ древней, такъ и современной математики.

Колыбелью математическихъ наукъ и цивилизаціи вообще не безъ основаній считается Востокъ, но ни одинъ еще ученый не могъ прослѣдить первыхъ шаговъ прогресса въ области математики. Нѣкоторые считаютъ исходнымъ пунктомъ Египетъ, другіе—Китай, Индію или Халдею, а иные указываютъ на какой-то древній, теперь уже вымершій, народъ, достигшій въ свое время высокой степени культуры. Какъ бы то ни было,

но самые древніе изъ дошедшихъ до насъ памятниковъ математическаго развитія древнихъ народовъ, большею частью, принадлежатъ египтянамъ и халдеямъ.

Начало математики вообще имѣетъ тѣсную связь съ развитіемъ философіи; но на какихъ бы основахъ ни возникла математика, важно то, что съ теченіемъ времени, находя извѣстныя свойства для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ и постепенно комбинируя ихъ, человѣчество могло вывести разнообразныя правила, придавъ имъ такимъ образомъ видъ нѣкоторой законности.

Подобнымъ образомъ, эмпирически и возникла одна изъ самыхъ первыхъ и важныхъ отраслей математики—геометрія, которая была тѣсно связана какъ съ развитіемъ архитектуры, такъ и съ развитіемъ астрономіи и измѣреніемъ земель, при чемъ вопросъ, какимъ образомъ эта наука могла принять чисто умозрительную форму для насъ, вѣроятно, навсегда останется загадкой.

Зародыши геометрическихъ познаній относятъ въ Египетъ, откуда предполагаютъ ея переходъ къ грекамъ, гдѣ уже она и получила настоящее свое развитіе и приняла чисто научный характеръ, благодаря трудамъ философовъ Александрійской школы, каковы Архимедъ, Эвклидъ и другіе. Но прежде, чѣмъ перейти къ развитію математики въ Греціи, бросимъ бѣглый взглядъ на познанія болѣе древнихъ народовъ, каковы халдеи, египтяне, китайцы и т. п.

Халдеи. Какъ показали новѣйшія изслѣдованія, математическія знанія халдеевъ достигли значительнаго развитія въ древней Вавилоніи и Ассиріи, но, по недостатку матеріала, точный отчетъ объ ихъ знаніяхъ дать довольно затруднительно; извѣстно лишь, что различнымъ числамъ халдеи приписывали различныя мистическія свойства и значенія, которыя находили примѣненіе въ ихъ религіозныхъ и философскихъ воззрѣніяхъ. Каждый изъ халдейскихъ боговъ обозначался однимъ изъ цѣлыхъ чиселъ между 1 и 60 (у халдеевъ была 60-ричная система счисленія) и занималъ опредѣленное мѣсто на небѣ. Ряду цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствовалъ рядъ дробей, изъ которыхъ каждая дробь относилась къ извѣстному злому духу. Халдейскимъ астрономамъ были извѣстны ариѳметическая и геометрическая прогрессіи; кромѣ того, у нихъ существовали таблицы квадратовъ и кубовъ чиселъ.

О познаніяхъ халдеевъ въ алгебрѣ почти неизвѣстно; предполагаютъ все-таки, что имъ не безызвѣстно было рѣшеніе нѣкоторыхъ алгебраическихъ вопросовъ.

Геометрическія фигуры у нихъ имѣли значеніе гадательныхъ знаковъ; имъ были извѣстны параллельныя линіи, треугольникъ, квадратъ и т. п. Они умѣли дѣлить окружность на 6 равныхъ частей, знали приближенное отношеніе длины окружности къ діаметру ($\pi=3$) и т. д. Но главное вниманіе ихъ было обращено на астрономію; при наблюденіяхъ они пользовались приборами, похожими на астролябію; имъ былъ извѣстенъ гномонъ и т. п.

Вообще же математика народовъ древней Ассиріи и Вавилоніи, будучи связана съ различнаго рода мистическими воззрѣніями и толкованіями, не была приведена въ какую либо систему, вслѣдствіе чего она не могла достигнуть болѣе или менѣе значительнаго развитія.

Египтяне. О математическихъ познаніяхъ египтянъ мы знаемъ лишь по надписямъ на стѣнахъ египетскихъ храмовъ (въ Едфу) и по найденной древней рукописи, получившей названіе папируса Ринда, по имени англичанина Ринда, пожертвовавшаго этотъ папирусъ Британскому Музею. Изъ содержанія этого папируса видно, что египетскіе математики почти за 3000 лѣтъ до Р. Хр. достигли довольно значительныхъ результатовъ; они, напр., умѣли разлагать дроби на рядъ дробей съ числителями, равными единицѣ (ряды); имъ было извѣстно приведеніе дробей къ одному знаменателю; они умѣли рѣшать ур-ія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; имѣли понятіе и, весьма вѣроятно, знали свойства ариѳметическихъ прогрессій; умѣли находить площади треугольника и трапеціи, а также и объемы пирамидъ. Египтяне имѣли представленіе о дѣленіи и преобразованіи фигуръ; ими была даже сдѣлана попытка къ рѣшенію задачи на квадратуру круга. Въ папирусѣ Ринда такимъ образомъ даны только свѣдѣнія практической геометріи, но совершенно отсутствуютъ основныя геометрическія положенія и теоремы.

Древніе египетскіе математики, подобно халдеямъ, не были чужды разнаго рода мистическихъ воззрѣній на различныя со-

отношенія между числами и геометрическимъ фигурамъ придавали различныя мистическія толкованія.

Индусы. По словамъ одного арабскаго изслѣдователя, у индусовъ процвѣтали науки еще въ глубокой древности.

Изъ разсмотрѣнія ариѳметическихъ методовъ мы видимъ, что имъ были извѣстны четыре основныхъ дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней, правила смѣшенія, товарищества, сплавовъ, процентовъ и тройное правило (конечно, вся система индусской математики, какъ и системы другихъ народовъ древности, сильно разнилась отъ современной, когда уже она приняла вполнѣ обоснованную форму).

Изъ геометріи индусамъ было извѣстно довольно много; они, какъ и греки (что мы увидимъ далѣе), старались рѣшить задачу на трисекцію угла, квадратуру круга и кубатуру; они знали многое изъ планиметріи и стереометріи.

Познанія по алгебрѣ были также у нихъ обширны. Любимымъ вопросомъ былъ отдѣлъ о неопредѣленномъ анализѣ (неопредѣленныя ур-ія); они рѣшали ур-ія первой и второй степени; знали извлеченіе корней; рѣшали нѣкоторые частные случаи ур-ій третьей степени; знали прогрессіи и теорію соединеній, а также имѣли нѣкоторое представленіе о приложеніи алгебры къ геометріи.

Изъ тригонометріи имъ были извѣстны основныя формулы, дуги приведенія, синусы и косинусы суммы и разности двухъ дугъ и т. п.; при этомъ изъ тригонометрическихъ величинъ они пользовались преимущественно синусомъ, косинусомъ и синусомъ верзусомъ (sin vers.). Имъ даже, по нѣкоторымъ свѣдѣніямъ, была извѣстна сферическая тригонометрія (начатки). Индусамъ также приписываютъ изобрѣтеніе современной нумераціи, неправильно называемой арабской.

Китайцы. Свѣдѣнія о развитіи математики въ Китаѣ весьма скудны; можно сказать болѣе или менѣе увѣренно только то, что въ своихъ познаніяхъ они довольно сильно отстали отъ другихъ народовъ, хотя въ Китаѣ получили свое начало многія замѣчательныя открытія.

Отдѣльныхъ сочиненій по математикѣ въ китайской литературѣ не существовало, а въ каждомъ изъ сочиненій говори-

лось вообще о всѣхъ наукахъ. У одного изъ китайскихъ геометровъ мы встрѣчаемъ ариѳметическій треугольникъ, нѣкоторыя свойства котораго были еще раньше извѣстны арабамъ (въ XI вѣкѣ), и который былъ найденъ впослѣдствіи Паскалемъ. Наиболѣе же блестящихъ результатовъ китайскіе математики достигли въ неопредѣленномъ анализѣ.

Греки. Одной изъ самыхъ древнѣйшихъ философскихъ школъ Греціи считаютъ іонійскую (представителемъ которой является Ѳалесъ Милетскій), при чемъ полагаютъ, что въ ней математика, а въ особенности геометрія, совершенно не имѣла научнаго характера, но основывалась всецѣло на наглядномъ представленіи, замѣнявшемъ всѣ позднѣйшія доказательства.

Болѣе научно обосновалась геометрія въ пиѳагорейской школѣ, главная цѣль которой состояла въ изслѣдованіи различныхъ свойствъ чиселъ, которымъ приписывались мистическія значенія. Пиѳагоръ, основатель школы, различалъ четныя и нечетныя числа, квадратныя, треугольныя, пирамидальныя и т. п.; при этомъ въ его ученіи мы находимъ уже зародышъ теоріи прогрессій и рядовъ, а также начала ученія о пропорціяхъ, что впослѣдствіи дало возможность геометру Архиту рѣшить одну изъ основныхъ задачъ древнихъ грековъ, а именно— задачу на удвоеніе куба, которая была сведена къ отысканію средней пропорціональной.

Вообще же ко времени основанія школъ платоновской и аристотелевской геометрическая изобрѣтательность грековъ побѣдила трудность рѣшенія задачъ на квадратуру круга, трисекцію угла и кубатуру, которыя оказались возможными не съ помощью циркуля и линейки, а при помощи нѣкоторыхъ кривыхъ высшихъ порядковъ, какова, напр., квадратрикса Динострата *).

Съ основаніемъ александрійской школы геометрія была возведена на высокую степень совершенства и получила ту законченность, которую она имѣетъ въ трактатѣ Эвклида «Начала».

*) Проклъ, комментаторъ Эвклида, приписываетъ открытіе квадратриксы Гиппію, современнику Сократа, который пользовался ею для рѣшенія задачи трисекцію угла. Динострать примѣнилъ впослѣдствіи эту кривую для рѣшенія вопроса о квадратурѣ круга.

Такимъ образомъ, первоначальное развитіе геометрія получаетъ въ Малой Азіи у іонійцевъ, затѣмъ переходитъ въ южную Италію къ пиѳагорейцамъ, далѣе въ самый центръ Греціи— Аѳины (платоновская школа) и, наконецъ, въ Александрію.

Съ паденіемъ александрійской школы возникаетъ аѳинская, а затѣмъ византійская, указывающая упадокъ математическихъ наукъ, а съ паденіемъ и этихъ школъ прекращается вообще развитіе математики въ Греціи.

Вполнѣ научный характеръ геометрія пріобрѣтаетъ лишь со временъ Эвклида, поставившаго математику въ ряды наукъ.

Эпоху процвѣтанія александрійской школы вообще можно считать золотымъ вѣкомъ въ развитіи греческой математики, такъ какъ съ нею связаны имена великихъ математиковъ, каковы: Архимедъ, Эвклидъ и Аполлоній Перигейскій.

Эвклидъ, главнымъ образомъ, сдѣлался извѣстнымъ благодаря упомянутому выше трактату по геометріи, въ связи съ изложеніемъ нѣкоторыхъ понятій изъ ариѳметики; важнѣе же всего развитіе Эвклидомъ новыхъ методовъ, какъ, напр., ученіе о данныхъ величинахъ (рѣшеніе ур-ій), теорія чиселъ, несоизмѣримыя величины, правильныя тѣла и т. п.; при этомъ въ ученіи о данныхъ величинахъ не трудно усмотрѣть первые зародыши аналитической геометріи, впослѣдствіи развитой Декартомъ. Въ этомъ же трактатѣ мы находимъ теорію пропорцій, отысканіе дѣлителей и кратныхъ данныхъ чиселъ, а также термины: плоское число, квадратное, кубичное, тѣлесное и т. п. Въ ученіи о несоизмѣримыхъ величинахъ мы встрѣчаемъ основанія теоріи исчерпываній, которая замѣняла древнимъ современную теорію безконечно-малыхъ и послужила вмѣстѣ съ открытой въ XVII вѣкѣ задачей «о проведеніи касательныхъ къ кривымъ» основой развитія дифференціальнаго исчисленія.

Другой представитель александрійской школы, жившій въ III вѣкѣ до Р. Хр., Архимедъ можетъ по заслугамъ назваться величайшимъ математикомъ древности. По свидѣтельству Плутарха, древніе изумлялись той ясности въ доказательствахъ Архимеда, съ которой онъ ближе всего подошелъ къ новѣйшимъ методамъ и теоріямъ. Главныя заслуги его состоятъ въ

томъ, что онъ далъ впервые методъ, сходный съ методомъ предѣловъ, и съ его помощью открылъ множество теоремъ, а также подробно изучилъ коническія сѣченія и другія кривыя въ связи съ получаемыми вслѣдствіе ихъ вращенія тѣлами, называвшимися коноидами и сфероидами и носящими въ современной математикѣ термины: параболоидъ вращенія, эллипсоидъ вращенія и т. п. Разсѣкая эти тѣла вращенія параллельными плоскостями и пользуясь теоріей предѣловъ, Архимедъ рѣшилъ вопросъ о кубатурѣ тѣлъ, послужившей основой теоріи опредѣленныхъ интеграловъ. Въ его сочиненіи «О числѣ песчинокъ» мы находимъ первую идею десятичной системы счисленія. При многочисленныхъ вычисленіяхъ, встрѣчающихся въ этомъ сочиненіи, Архимедъ пользуется ариѳметической и геометрической прогрессіями. Сравненіе этихъ прогрессій впослѣдствіи привело Непера къ открытію логариѳмовъ.

Почти въ одно время съ Архимедомъ жилъ знаменитый геометръ Аполлоній Перигейскій, прославившійся главнымъ образомъ трактатомъ «о коническихъ сѣченіяхъ», въ которомъ, между прочимъ, встрѣчаемъ вопросъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ.

Во второмъ вѣкѣ до Р. Хр. великій астрономъ Гиппархъ положилъ начало математической астрономіи; для астрономическихъ вычисленій онъ пользовался прямолинейной и сферической тригонометріей, основы которой имъ были изложены въ сочиненіи «О восхожденіи и захожденіи свѣтилъ». Кромѣ того ему приписываютъ открытіе стереографической проекціи и также приложеніе геометріи къ астрономіи.

Въ срединѣ II вѣка по Р. Хр. въ Греціи славится астрономъ и геометръ Птоломей, извѣстный своей системой движенія небесныхъ тѣлъ и нѣкоторой разработкой теоріи координатныхъ осей.

Далѣе мы встрѣчаемъ самаго виднаго представителя второй александрійской школы Діофанта, не безъ основанія считаемаго творцомъ алгебры.

Въ исторіи алгебры различаютъ три періода: 1) алгебру риторическую—самую низкую ея ступень, когда еще всѣ дѣйствія и

величины выражались словами и не существовало никакихъ символовъ; 2) алгебру синкопическую—вторую ступень ея развитія; въ этотъ періодъ начинаютъ сокращать слова, и появляются нѣкоторые знаки, и 3) алгебру символическую—послѣднюю ступень ея развитія, гдѣ всѣ дѣйствія безъ исключенія изображаются посредствомъ символовъ.

Діофантъ былъ первый, рѣшившій ур-іе второй степени алгебраическимъ путемъ, такъ какъ ранѣе эти ур-ія рѣшались чисто геометрическимъ построеніемъ. Благодаря Діофанту математика грековъ слѣдуетъ новому направленію, при которомъ главную роль играетъ алгебра, а геометріи отводится уже второе мѣсто. Такое измѣненіе направленія въ теченіи развитія математики повторяется довольно часто; такъ, Пиѳагоръ однимъ изъ первыхъ изслѣдуетъ свойства чиселъ; свою теорему о квадратѣ, построенномъ на гипотенузѣ, онъ прилагаетъ къ числамъ и вводитъ такимъ образомъ нѣкоторую связь между геометріей и ариѳметикой. Ариѳметикой вообще называлась наука о числахъ, т.-е. объ изслѣдованіи свойствъ чиселъ и раздѣленіи ихъ на классы. Греческая ариѳметика—наука чисто теоретическая; въ такомъ духѣ написаны были у грековъ всѣ ариѳметики, изъ которыхъ самой обстоятельной является ариѳметика Никомаха. Практическая ариѳметика носила названіе логистики.

Начиная съ Эвклида, ариѳметика принимаетъ чисто научный характеръ, хотя и чисто геометрическій, такъ какъ всѣ свойства чиселъ объясняются на линіяхъ, площадяхъ и т. п. Такой характеръ ариѳметика сохраняетъ до Никомаха, который излагаетъ ее безъ посредства геометріи, такъ что у него она является вполнѣ наукой о числахъ.

Со времени Никомаха вся математическая литература принимаетъ ариѳметическій характеръ вплоть до начала XIII столѣтія, когда Фибоначчи знакомитъ европейцевъ съ алгеброй арабовъ; съ этого момента математика принимаетъ алгебраическое направленіе, которому слѣдуетъ до XVI вѣка, когда начинаютъ интересоваться трудами Діофанта, изученіе которыхъ даетъ толчокъ къ усовершенствованію методовъ неопредѣленнаго анализа, но съ появленіемъ метода дифференціаловъ неопредѣленный анализъ снова забрасывается до тѣхъ поръ, пока Эйлеръ не обращаетъ на него главное вниманіе, чѣмъ и полагаетъ начало окончательному

его изслѣдованію, благодаря трудамъ математиковъ XIX вѣка, каковы Лагранжъ, Гауссъ, Якоби и др.

Блестящее развитіе наукъ у ученыхъ александрійской школы во время упадка Римской имперіи (гдѣ математическія познанія были значительно слабѣе греческихъ, такъ какъ у римлянъ математика существовала лишь для практическихъ примѣненій) останавливается въ VI столѣтіи по Р. Хр.

Арабы. Послѣ ряда религіозныхъ войнъ, имѣвшихъ своей цѣлью распространеніе Ислама огнемъ и мечомъ, арабы значительно укрѣпили свои позиціи и зажили мирной жизнью. Основанная ими столица Багдадъ дѣлается центромъ цивилизаціи, и въ промежутокъ времени между IX и XIII вѣками создается обширная математическая литература, основы которой были, большею частью, заимствованы у грековъ.

Сравнивая оставшіеся послѣ арабовъ памятники по математикѣ и астрономіи, мы видимъ, что ихъ ученые превзошли во многомъ греческихъ. Главныя заслуги арабовъ состоятъ въ томъ, что они поставили тригонометрію въ ряды математическихъ наукъ. Греческая тригонометрія носитъ чисто геометрическій характеръ, а у арабовъ характеръ тригонометріи—чисто алгебраическій. Арабы первые ввели тангенсъ, какъ самостоятельную величину, а также котангенсъ, секансъ и косекансъ, о которыхъ до нихъ нигдѣ не упоминается; кромѣ того, ими были построены тригонометрическія таблицы для тангенсовъ и котангенсовъ.

Изъ числа самостоятельныхъ трудовъ арабовъ упомянемъ введеніе ими трехъ или четырехъ основныхъ предложеній, которыя лежатъ въ основѣ тригонометріи; введеніе синусовъ дугъ вмѣсто двойныхъ хордъ; научное обоснованіе приложенія алгебры къ геометріи; рѣшеніе нѣкоторыхъ ур-ій 3-й степени и т. п.

Средніе и новые вѣка. Съ введеніемъ христіанской религіи быстро прекращается развитіе математики. Христіане безъ разбора истребляютъ сочиненія язычниковъ, стремясь распространить повсемѣстно Евангеліе. Въ эту мрачную эпоху погибаютъ замѣчательнѣйшіе памятники древней культуры. Творенія арабскихъ мыслителей и математиковъ не могли получить распространенія въ Европѣ, такъ какъ фанатичное и нетерпимое духовенство, пользовавшееся тогда неимовѣрнымъ вліяніемъ на

самые широкіе круги населенія, считало все, исходящее отъ нехристіанъ, ересью и богохульствомъ. Наступило полное господство схоластическаго догматизма, всякая критика и стремленіе впередъ преслѣдовались самымъ безпощаднымъ образомъ вплоть до сжиганія на кострѣ. Произведенія почти всѣхъ мыслителей среднихъ вѣковъ проникнуты духомъ схоластики и мистицизма.

Математики этого мрачнаго историческаго періода занимаются преимущественно вопросами, меньше всего касающимися истинной математической науки: пишутся цѣлые трактаты о мистикѣ чиселъ и объ ихъ таинственныхъ свойствахъ. Тяжелое и суровое время прожило человѣчество подъ ужаснымъ гнетомъ фанатизма и невѣжества, и только отдѣльныя свѣтлыя личности цѣпко держались за культурное наслѣдіе грековъ и римлянъ и въ тиши монастырскихъ келій знакомились съ идеями арабскихъ мыслителей. Цѣпь развитія знаній не была окончательно потеряна. Изъ математиковъ среднихъ вѣковъ особенно достойны упоминанія имена Алькуина, Герберта и Рожера Бэкона, которыя являются свѣточами въ безконечно-однообразной умственной культурѣ этого времени.

Открытіе Америки и начало реформаціи знаменуютъ собой конецъ среднихъ вѣковъ и вмѣстѣ съ тѣмъ начало эпохи возрожденія наукъ и искусствъ. Изобрѣтеніе книгопечатанія явилось той могущественной силой, которая быстро разорвала оковы, связывавшія Европу въ теченіе многихъ столѣтій.

Возрожденіе математическаго творчества относится къ началу XVI столѣтія. Къ этому времени одно за другимъ быстро слѣдуютъ открытія въ различныхъ областяхъ математики и астрономіи. Въ 1545 году въ Нюренбергѣ появляется въ высшей степени цѣнное произведеніе Кардана («Ars magna»), содержащее вообще зародыши современной алгебры, выходящіе за предѣлы сравнительно узкой схемы античной математики. Въ этомъ произведеніи Карданъ даетъ рѣшеніе кубическаго уравненія.

Начало второй половины XVI столѣтія выдвинуло на первый планъ тригонометрическія вычисленія. Блестящіе успѣхи астрономіи, связанные съ именемъ Коперника, обусловливаютъ появленіе въ свѣтъ первыхъ большихъ тригонометрическихъ таблицъ. Конецъ XVI вѣка ознаменовывается открытіемъ десятич-

ныхъ дробей. Стройное и систематическое изложеніе свойствъ десятичныхъ дробей и дѣйствій съ ними впервые дано было въ «Алгебрѣ» нидерландца Стевина, появившейся въ 1585 году.

Самую видную роль въ исторіи математики сыгралъ XVII в.

Ни одинъ вѣкъ не блещетъ столькими великими именами, столькими глубокими всеобъемлющими идеями; никогда человѣческая мысль не достигала такихъ высотъ, никогда не дѣлала такихъ великихъ обобщеній. Человѣческій геній, окончательно и безповоротно освободившись отъ оковъ средневѣковья, предсталъ во всей своей красотѣ и величіи. Тенденція къ дробленію математики на рядъ частей или дисциплинъ, вполнѣ отграниченныхъ одна отъ другой, и стремленіе обойтись минимумомъ вспомогательныхъ средствъ, избѣгая по возможности заимствованій у сосѣднихъ областей, уступаютъ свое мѣсто новому направленію. Это новое направленіе, господствовавшее почти безраздѣльно до XIX столѣтія, придаетъ главное значеніе органической связи между отдѣльными областями математики и предпочитаетъ тѣ методы, которые даютъ одновременное пониманіе многихъ областей съ одной и той же точки зрѣнія. Можно сказать, что конечной цѣлью новаго направленія является соединеніе всѣхъ математическихъ дисциплинъ въ одно цѣлое. Честь великаго обобщенія, существенно измѣнившаго весь дальнѣйшій ходъ развитія математическихъ знаній, принадлежитъ знаменитому математику и философу Декарту-Картезію. Аналитическая геометрія Декарта (1637) установила связь между числомъ и пространствомъ и такимъ образомъ объединила алгебру съ геометріей.

Со временъ Декарта вплоть до XIX вѣка развитіе этихъ двухъ наукъ идетъ совмѣстно и абсолютно нѣтъ возможности отдѣлить одну отъ другой. Въ связи съ аналитической геометріей тотчасъ выступаютъ двѣ великія проблемы XVII вѣка: проблема касательныхъ къ кривымъ и проблема квадратуры, т.-е. проблемы дифференцированія и интегрированія. Эти проблемы занимали умы многихъ выдающихся математиковъ XVII вѣка. Кавальери, Роберваль, Ферматъ и Барроу (учитель Ньютона) удѣляли этимъ вопросамъ много вниманія и своими выдающимися трудами подготовили почву для открытія анализа безконечно малыхъ. Надо замѣтить, что всѣ эти ученые при разрѣшеніи поставленныхъ

вопросовъ исходили изъ различныхъ точекъ зрѣнія и пользовались различными и въ высшей степени оригинальными методами. Изслѣдованіе вопроса о maximum'ѣ и minimum'ѣ функцій, играющее въ высшей степени важную роль въ дифференціальномъ исчисленіи, составляетъ почти исключительно заслугу Ферма́та *).

Для развитія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія въ собственномъ смыслѣ недоставало еще только одного, весьма существеннаго, факта: еще не знали, что обѣ эти науки находятся въ самой тѣсной связи, что между ними столько же общаго, сколько между прямыми и обратными геометрическими теоремами. Въ этомъ заключается сущность того громаднаго прогресса, который осуществился въ концѣ XVII вѣка. Создателями анализа безконечно малыхъ историки математики считаютъ Ньютона и Лейбница, работавшихъ совершенно самостоятельно и придавшихъ своимъ произведеніямъ совершенно различныя формы. Ньютоново исчисленіе флюксій и дифференціальное исчисленіе Лейбница, сильно отличаясь способами обозначеній (такъ называемымъ логариѳмомъ), опредѣленіями и общимъ характеромъ изложенія, однако удивительно родственны по своему внутреннему содержанію, цѣли и полученнымъ результатамъ. Внѣшнее различіе этихъ двухъ произведеній столь громадно, что ввело въ заблужденіе не только современниковъ геніальныхъ творцовъ анализа, но даже въ XIX столѣтіи нѣкоторые математики (Гергартъ и Вайсенборнъ) рѣзко отграничивали ньютоновы флюксіи отъ производныхъ Лейбница. Новое исчисленіе быстро распространилось по континенту и сразу сдѣлалась достояніемъ всего математическаго міра. Братья Бернулли, Тэйлоръ и Маклоренъ тотчасъ же приложили новое ученіе къ изслѣдованію различныхъ математическихъ вопросовъ, значительно расширили это ученіе и обнаружили удивительную универсальность метода безконечно-малыхъ. Основной принципъ Лейбница, а именно прин-

*) Ферматъ является безусловно однимъ изъ самыхъ геніальныхъ людей своего вѣка. Его заслуги въ области математическихъ знаній очень велики: онъ первый освободилъ теорію чиселъ отъ мистическаго налета среднихъ вѣковъ и поставилъ ее на строго научную почву. Судя по письмамъ къ Паскалю, Ферматъ много занимался также теоріей вѣроятностей. Нѣкоторые историки склонны даже считать его отцомъ этой науки.

ципъ непрерывности во всякомъ процессѣ природы, легъ въ основаніе всѣхъ дальнѣйшихъ математическихъ построеній XVIII и XIX вѣка.

Заканчивая краткій обзоръ великихъ открытій золотого вѣка математики, нельзя не упомянуть о возникновеніи новой геометріи, извѣстной теперь подъ названіемъ проективной. Начало этому новому ученію было положено трудами Паскаля и Дезарга.

Къ блестящимъ открытіямъ XVII вѣка относится еще созданіе шотландцемъ Непером теоріи логариѳмовъ и появленіе первыхъ логариѳмическихъ таблицъ (1614 г.). Логариѳмы дали легкое и удобное вспомогательное средство для числовыхъ выкладокъ и далеко впередъ подвинули практическую тригонометрію.

До XVIII вѣка исторія имѣетъ еще возможность слѣдить за развитіемъ каждой отдѣльной математической дисциплины. Начиная съ XVIII вѣка, всѣ математическія дисциплины какъ бы переплетаются, ученые работаютъ одновременно во всѣхъ областяхъ математики и двигаются впередъ съ изумительной быстротой. Одно открытіе слѣдуетъ за другимъ, одна математическая идея смѣняетъ другую, все старое перерабатывается, шлифуется и получаетъ окончательную какъ внѣшнюю, такъ и внутреннюю отдѣлку. Безсмертныя имена Эйлера, Даніила Бернулли, d'Alambert'a, Клэро, Лагранжа, Лапласа, Лежандра, Монжа и Карно составляютъ украшеніе этой эпохи и тѣсно связаны со всѣмъ дальнѣйшимъ прогрессомъ математики вообще и съ развитіемъ ученія о дифференціальныхъ уравненіяхъ, варіаціонномъ исчисленіи и аналитической механикѣ въ частности. Въ концѣ XVIII столѣтія появился трудъ Монжа (1798) «Geometrie descriptive», содержащій въ себѣ начала современной начертательной геометріи, играющей столь важную роль въ техникѣ и архитектурѣ. Черезъ годъ знаменитый нѣмецкій математикъ Гауссъ доказалъ, что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, вещественный или комплексный. Эта теорема легла въ основу всего высшаго алгебраическаго анализа.

Самымъ существеннымъ для начала XIX столѣтія является строгое логическое обоснованіе высшаго анализа посредствомъ признаковъ сходимости и расходимости рядовъ, а также и изложеніе его въ современномъ духѣ. Окончательная разработка

анализа составляетъ заслугу корифеевъ математики XIX вѣка— Гаусса, Абеля и Коши. Изъ дальнѣйшаго развитія математики можно отмѣтить возникновеніе математической физики, теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго по Коши и Риману и векторіальнаго анализа Грассмана и Гамильтона. Благодаря трудамъ Понселе, Шаля, Штейнера и Штаудта, проективная геометрія, начало которой было положено еще въ XVI столѣтіи, вылилась въ стройную и систематическую науку. Изслѣдованіе аксіомъ геометріи и созданіе новыхъ геометрическихъ системъ, каковы— геометрія Лобачевскаго и Римана, составляютъ всецѣло завоеваніе новѣйшаго времени. Одной изъ важнѣйшихъ особенностей XIX вѣка считаютъ стиль и художественную форму математическаго изложенія. Сочиненія лучшихъ математиковъ нашего времени обладаютъ такими художественными достоинствами, о которыхъ раньше и не мечтали.

Въ заключеніе замѣтимъ, что математика имѣетъ безусловное преимущество передъ другими науками тѣмъ, что ея открытія и успѣхи, являющіеся слѣдствіемъ исключительно строго-логическаго мышленія, стоятъ внѣ всякихъ сомнѣній и имѣютъ абсолютную цѣнность, которой не можетъ коснуться всесильный бичъ временъ.

Ариѳметика.

1.

По столбу, высота котораго 1 аршинъ, ползетъ улитка. Начавъ съ основанія столба, она днемъ поднимается на 4 вершка, а ночью спускается на 3 вершка. Черезъ сколько сутокъ улитка доползетъ до верха столба?

Рѣшеніе. За сутки улитка поднимается на 1 вершокъ, а за 12 сутокъ на 12 вершковъ. Оставшіеся до верху 4 вершка она доползетъ за 13-й день. Улитка, слѣдовательно, до верху столба будетъ ползти $12^1/_2$ сутокъ.

2.

Покупатель, купивъ въ магазинѣ шляпу за 15 руб., уплатилъ продавцу двадцатипятирублевый кредитный билетъ. Продавецъ, размѣнявъ данный ему билетъ у сосѣда, отдалъ покупателю 10 руб. сдачи. Черезъ нѣкоторое время къ продавцу приходитъ сосѣдъ и заявляетъ, что полученный имъ для размѣна билетъ—фальшивый, вслѣдствіе чего онъ возвращаетъ его продавцу и получаетъ въ обмѣнъ настоящую двадцатипятирублевку. Сколько убытку понесъ продавецъ?

Рѣшеніе. Продавецъ отдалъ покупателю шляпу цѣною въ 15 рублей и 10 рублей сдачи; всего онъ здѣсь потерялъ 25 рублей. Деньги же, полученныя отъ сосѣда при размѣнѣ билета, онъ снова ему возвратилъ. Слѣдовательно продавецъ потерялъ всего 25 рублей.

3.

Какими гирями, общій вѣсъ которыхъ составляетъ одинъ пудъ, можно взвѣшивать грузы вѣсомъ отъ 1 до 40 фунтовъ (въ цѣлыхъ числахъ фунта)?

Отвѣтъ. Гири должны быть вѣсомъ въ 1, 3, 9 и 27 фунтовъ.

4.

Сколько разъ придется приставлять пилу, чтобы распилить бревно на 9 частей?

Рѣшеніе. Только 8 разъ, такъ какъ при отдѣленіи предпослѣдней части отдѣлится также и послѣдняя часть.

5.

Раздѣлить 7 апельсиновъ на 12 равныхъ частей при условіи, чтобы каждый апельсинъ рѣзать меньше, чѣмъ на 12 частей.

Рѣшеніе. Разрѣжемъ четыре апельсина каждый на три части, получимъ 12 частей, а послѣдніе 3—каждый на 4 части—получимъ также 12 частей. Взявъ одну часть отъ первыхъ четырехъ апельсиновъ и одну часть отъ вторыхъ трехъ—будемъ имѣть одну двѣнадцатую часть отъ семи апельсиновъ.

6.

Два мальчика купили въ лавкѣ 8 пряниковъ. На эту покупку первый потратилъ 5, а второй 3 копейки. Встрѣтивъ по дорогѣ товарища, они втроемъ съѣли всѣ пряники, при чемъ каждый съѣлъ одну и ту же порцію. При прощаніи встрѣтившійся товарищъ далъ мальчикамъ 8 копеекъ. Какъ они должны раздѣлить между собою полученныя деньги?

Рѣшеніе. Присоединившійся товарищъ оцѣнилъ въ 8 копеекъ съѣденные имъ $^8/_3$ пряника, или $^1/_3$ пряника въ 1 копейку. Первый мальчикъ удѣлилъ товарищу $\frac{15}{3}-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$ пряника, а вто-

рой $\frac{9}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$ пряника. Слѣдовательно, первый долженъ получить 7 коп., а второй 1 коп.

7.

Желѣзная дорога въ два пути соединяетъ противоположныя станціи A и B. Каждый часъ съ обоихъ концовъ одновременно выходитъ по поѣзду. Сколько по пути встрѣтится поѣздовъ, если ѣхать отъ A къ B, зная, что ѣзды между этими станціями ровно сутки?

Рѣшеніе. Въ моментъ отхода какого-нибудь поѣзда со станціи A на эту же станцію прибываетъ поѣздъ, вышедшій со станціи B ровно на 24 часа раньше. Этотъ поѣздъ, конечно, не будетъ встрѣчнымъ. По дорогѣ поѣздъ встрѣтитъ 23 поѣзда, вышедшихъ изъ B въ предшествующія сутки, и 24 поѣзда, вышедшіе изъ B въ то время, когда поѣздъ A находился въ пути. Всего, слѣдовательно поѣздъ A встрѣтитъ $23+24=47$ поѣздовъ.

8.

Одинъ господинъ завѣщалъ капиталъ въ 14000 руб. своей женѣ при условіи, что если у нея родится мальчикъ, то сынъ долженъ получить вдвое больше матери, а если родится дочь, то мать должна получить вдвое больше дочери. Родились близнецы: сынъ и дочь. Какъ было исполнено завѣщаніе?

Рѣшеніе. Изъ наслѣдства должна быть удѣлена одна часть матери, двѣ такія же части сыну, а половина такой же части дочери. Все наслѣдство должно быть раздѣлено на $1+2+\frac{1}{2}$ части, т.-е. на $3\frac{1}{2}$ части. Одна часть составляетъ $14000 : 3\frac{1}{2} = 4000$ рублей. Слѣдовательно, мать должна получить 4000, сынъ 8000, а дочь 2000 рублей.

9.

На памятникѣ Діофанта находится слѣдующая надпись: «Прохожій! Подъ симъ камнемъ покоится

прахъ Діофанта, умершаго въ старости. Шестую часть его жизни заняло дѣтство, двѣнадцатую—отрочество, седьмую—юность. Затѣмъ протекла половина его жизни, послѣ чего онъ женился. Черезъ пять лѣтъ у него родился сынъ, а когда сыну минуло 4 года, Діофантъ скончался. Скажи, сколькихъ лѣтъ онъ умеръ?»

Рѣшеніе. Часть жизни Діофанта, протекшая отъ его рожденія до женитьбы, выразится суммой дробей: $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=$ $=\frac{75}{84}=\frac{25}{28}$; часть его жизни отъ женитьбы до смерти выразится разностью $1-\frac{25}{28}=\frac{3}{28}$. Эта часть, очевидно, равна $5+4=9$ годамъ. Слѣдовательно, Діофантъ умеръ, когда ему было $9:\frac{3}{28}=84$ года.

10.

Отцу 45 лѣтъ, а сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ ихъ возрасты будутъ относиться, какъ 9 : 4?

Рѣшеніе. Разность между лѣтами отца и сына будетъ за все время ихъ жизни постоянна и равна 35 годамъ, а разность между частями будетъ 9—4=5. Одна часть, слѣдовательно, выразится частнымъ 35 : 5=7 годамъ. Поэтому, когда ихъ возрасты будутъ относиться, какъ 9:4, отцу будетъ 7 . 9=63 года, а сыну 7 . 4=28 лѣтъ. Слѣдовательно требуемое задачей отношеніе лѣтъ наступитъ черезъ 63—45 или 28—10, т.-е. черезъ 18 лѣтъ.

11.

Ящикъ вмѣщаетъ 4 фунта изюма или 6 фунтовъ миндалю. Если его наполнить тѣмъ и другимъ на одинаковыя суммы, то содержимое будетъ вѣсить $4^1/_2$ фунта и стоить 1 руб. 8 коп. Что стоитъ фунтъ миндалю и изюма?

Рѣшеніе. Одинъ фунтъ миндалю занимаетъ столько же мѣста, сколько $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ фун. изюма; разница же въ вѣсѣ будетъ на $\frac{1}{3}$ фунт.

Такъ какъ вѣсъ ящика со смѣсью изюма и миндалю превышаетъ вѣсъ ящика съ однимъ изюмомъ на $^1/_2$ фунта, то, слѣдовательно, миндалю въ смѣси было $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$ ф., а изюма $4\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=3$ фун. Каждый сортъ стоитъ $108:2=54$ коп., поэтому 1 фун. миндалю стоитъ 36 коп., а 1 фун. изюма 18 коп.

12.

Два поѣзда по параллельнымъ путямъ движутся другъ другу навстрѣчу, одинъ со скоростью 30 верстъ въ часъ, а другой со скоростью 40 верстъ въ часъ. Пассажиръ, сидящій во второмъ поѣздѣ, замѣтилъ, что первый поѣздъ шелъ мимо него въ теченіе 6 секундъ. Какова длина перваго поѣзда?

Рѣшеніе. Первый поѣздъ проходитъ въ секунду $\frac{30}{60.60}=\frac{1}{120}$ версты, а второй $\frac{40}{60.60}=\frac{1}{90}$ версты. Длина перваго поѣзда равна разстоянію, пройденному вторымъ поѣздомъ въ теченіе 6 секундъ, сложенному съ разстояніемъ, пройденнымъ первымъ поѣздомъ въ теченіе того же времени. Слѣдовательно длина перваго поѣзда равна $\frac{1}{120}.6+\frac{1}{90}.6=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{3+4}{60}=\frac{7}{60}$ версты, или 58 саж. 1 арш.

13.

Опредѣлить моментъ между 1 часомъ и 2 часами, когда минутная стрѣлка часовъ покрываетъ часовую.

Рѣшеніе. Когда минутная стрѣлка проходитъ черезъ всѣ 60 дѣленій циферблата, часовая проходитъ только черезъ 5 его дѣленій. Слѣдовательно, минутная стрѣлка движется въ $60:5=12$ разъ быстрѣе часовой и каждую минуту нагоняетъ ее на $\frac{11}{12}$ дѣленія циферблата. Когда минутная стрѣлка была на 12 часахъ, часовая была на 1 часѣ; разница между ними 5 дѣленій. Стрѣлки, очевидно, совпадутъ черезъ $5:\frac{11}{12}=5^5/_{11}$ минуты.

14.

Купецъ пріобрѣлъ 11 шерстяныхъ платковъ, по 3 руб. 50 коп. за каждый. Нѣсколько изъ нихъ онъ продалъ, взявъ за каждый проданный платокъ столько лишнихъ полтинниковъ, сколько платковъ осталось непроданными. Опредѣлить число проданныхъ платковъ, зная, что онъ выручилъ сумму, равную затраченной на покупку всѣхъ платковъ.

Рѣшеніе. Такъ какъ на покупку платковъ купецъ потратилъ $11 \cdot 7 = 77$ полтинниковъ, а за каждый проданный платокъ онъ выручалъ цѣлое число полтинниковъ, то число проданныхъ платковъ должно быть дѣлителемъ 77. Очевидно, что за каждый проданный платокъ купецъ выручалъ 11 полтинниковъ или 5 руб. 50 коп., а всего имъ было продано 7 платковъ.

15.

Одинъ торговецъ при оптовой продажѣ своего товара дѣлаетъ съ назначенной на товаръ цѣны скидку въ 7% и, кромѣ того, въ случаѣ продажи на наличныя деньги, еще дѣлаетъ уступку въ 12% съ пониженной цѣны. Другой торговецъ дѣлаетъ скидку въ 12% съ назначенной и, кромѣ того, 7% съ пониженной цѣны при одинаковыхъ съ первымъ торговцемъ прочихъ условіяхъ. У котораго изъ нихъ выгоднѣе покупать товаръ на наличныя деньги?

Рѣшеніе. Первый торговецъ дѣлаетъ съ назначенной цѣны скидку въ 7%, т.-е. вмѣсто рубля получаетъ 93 копѣйки, а въ случаѣ продажи за наличныя деньги дѣлаетъ съ пониженной цѣны еще уступку въ 12%, т.-е. вмѣсто рубля получаетъ 88 коп., а вмѣсто 93 коп. получитъ $\frac{88.93}{100} = 81\frac{21}{25}$ коп. Разсуждая такимъ же образомъ относительно второго торговца, убѣдимся, что совершенно безразлично, покупать ли у того или у другого торговца.

16.

Землекопы нанялись выкопать двѣ ямы, объемы которыхъ должны относиться, какъ 1 : 2. Начавъ

съ утра копать бо́льшую яму, они послѣ полудня раздѣлились на двѣ равныя партіи. Первая партія продолжала копать бо́льшую яму и къ вечеру выкопала ее, а вторая партія принялась копать меньшую яму. Сколько было землекоповъ, если извѣстно, что въ теченіе слѣдующаго дня оставшуюся часть работы выполнилъ одинъ землекопъ?

Рѣшеніе. Обозначимъ однодневную рабочую силу всѣхъ землекоповъ единицей; чтобы выкопать большую яму, потребовалось $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ этой рабочей силы; слѣдовательно, чтобы выкопать меньшую яму, потребуется только $\frac{3}{8}$ этой рабочей силы. Въ первый день на меньшую яму было затрачено всего $\frac{1}{4}$ однодневной силы всѣхъ землекоповъ. Разность $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ составляетъ однодневную рабочую силу одного землекопа. Отсюда находимъ, что всѣхъ землекоповъ было $1:\frac{1}{8}=8$.

17.

Пассажирскій пароходъ, идя вверхъ по теченію рѣки, проходитъ разстояніе между городами *A* и *B* въ 4 часа 30 минутъ, а обратно въ 3 часа. Во сколько времени при тѣхъ же условіяхъ проплыветъ то же разстояніе боченокъ, брошенный по теченію рѣки въ мѣстѣ *A*?

Рѣшеніе. Внизъ по теченію пароходъ въ часъ проходитъ $\frac{1}{4\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}$ разстоянія между городами *A* и *B*, а вверхъ противъ теченія—только $\frac{1}{3}$ этого разстоянія. Разность между пройденными въ часъ разстояніями выразитъ двойную скорость теченія рѣки, потому что при движеніи противъ теченія скорость парохода въ стоячей водѣ не только не увеличивается на величину, равную скорости теченія, но, наоборотъ, еще уменьшается на

такую же величину. Слѣдовательно, скорость теченія будетъ $\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{9}}{2}=\frac{1}{18}$ разстоянія между городами, а потому боченокъ, брошенный по теченію, проплыветъ все разстояніе въ $1:\frac{1}{18}=$ $=18$ часовъ.

18.

Для нумераціи страницъ книги потребовалось 2775 цифръ. Сколько было въ книгѣ страницъ?

Рѣшеніе. Для нумераціи первыхъ 9 страницъ необходимо 9 цифръ, а для нумераціи слѣдующихъ 90 страницъ необходимо 180 цифръ. Разность 2775—189=2586 дастъ число цифръ, которыми перенумерованы страницы по 3 цифры, 4 цифры и т. д. въ каждой. Такъ какъ частное 2586 : 3=862 меньше тысячи, то страницъ, нумерованныхъ четырехзначными числами, очевидно, быть не можетъ. Всего въ книгѣ 862+99=961 стран.

19.

Сколько потребуется цифръ для того, чтобы перенумеровать книгу въ 1500 страницъ?

Рѣшеніе. Чтобы перенумеровать первыя 9 страницъ надо 9 цифръ; для слѣдующихъ 90 страницъ—180 цифръ, для слѣдующихъ 900 страницъ—2700 цифръ. Такимъ образомъ, чтобы перенумеровать въ книгѣ страницы до 1000-й, надо 2700+180+ +9=2889 цифръ. Слѣдующія страницы перенумеровываются по 4 цифры каждая. Такихъ страницъ по условію задачи будетъ 1500—999=501. На нихъ употреблено 501 . 4=2004 цифры. Всего же употреблено было 2889+2004=4893 цифры.

20.

Ученикъ правильно перемножилъ на доскѣ два числа—пятизначное на трехзначное, но нечаянно

стеръ нѣкоторыя цифры такъ, что у него осталось слѣдующее:

```
      *7***
        743
  ---------
     *****5
    ******
   ******
  ---------
  42***87*
```

(Мѣста стертыхъ цифръ обозначены звѣздочками).

Возстановить по этимъ даннымъ множимое и произведеніе.

Рѣшеніе. Если бы мы дѣлили произведеніе 42***875 на множителя 743, мы получили бы другой множитель *7***. Произведемъ это дѣленіе. Цифра единицъ числа *7*** можетъ быть только 5, такъ какъ нѣтъ больше ни одной цифры, которая, будучи умножена на 3, дала бы цифру единицъ произведенія 5. Умноживъ найденную цифру частнаго 5 на дѣлителя и вычтя результатъ изъ числа 42***875, получимъ сумму произведеній числа 743 на всѣ цифры числа *7**5, кончая цифрой десятковъ (т.-е. безъ цифры единицъ). Такъ какъ цифра десятковъ неизвѣстнаго частнаго, будучи умножена на 743, должна давать послѣдней цифрой 6, что видно по числу 42***16, то заключаемъ, что эта цифра можетъ быть только 2. Умножая цифру десятковъ частнаго на 743 и вычитая результатъ изъ числа 42***16, получимъ сумму произведеній числа 743 на всѣ цифры числа *7*25, кончая уже цифрой сотенъ.

```
42***875 | 743
    3715 | *7***
--------
42***16  |   125
      86
--------
42***3
```

Разсуждая по предыдущему, находимъ, что цифра сотенъ можетъ быть только 1. Итакъ, мы число *7*** можемъ написать въ видѣ *7125. Остающаяся неизвѣстной цифра частнаго будетъ 6, такъ какъ 6 . 7=42, а въ силу этого двѣ послѣднія слѣва цифры дѣлимаго 42***875, послѣ прибавленія къ нимъ оставшихся лишнихъ единицъ слѣдующаго высшаго класса (въ данномъ случаѣ милліонныя), будутъ уже не 42, а больше. Слѣдовательно послѣдняя искомая цифра будетъ 5 или меньше. При подстановкѣ

окажется, что 5 и есть недостающая цифра. Откуда находимъ множимое 57125 и произведеніе 42442875.

21.

Помѣщикъ продалъ табунъ лошадей тремъ покупателямъ. Первому онъ продалъ половину всѣхъ бывшихъ у него лошадей и еще полъ-лошади; второму половину оставшихся лошадей и еще полъ-лошади; наконецъ, третьему половину оставшихся лошадей и полъ-лошади. Сколько лошадей было въ табунѣ, если извѣстно, что ни одной лошади не пришлось рѣзать пополамъ?

Рѣшеніе. Полъ-лошади составляетъ, очевидно, вторую половину оставшихся послѣ второго покупателя лошадей; слѣдовательно, третій покупатель получилъ только одну лошадь. Не трудно сообразить, что второй покупатель получилъ 2, а первый 4 лошади. Всего въ табунѣ было 7 лошадей.

22.

Найти двузначное число, сумма цифръ котораго 13, а разность между искомымъ числомъ и обратнымъ ему, т.-е. числомъ, которое получится, если мы цифру единицъ искомаго числа поставимъ на мѣсто цифры десятковъ, а цифру десятковъ на мѣсто цифры единицъ, выражается числомъ, цифра единицъ котораго есть 7.

Рѣшеніе. Разность между двузначнымъ числомъ и обратнымъ ему всегда кратна 9. Въ данномъ случаѣ сумма цифръ этой разности должна непремѣнно равняться 9, а, слѣдовательно, сама разность будетъ 27. Не трудно сообразить, что сумма искомаго числа и обратнаго ему будетъ состоять изъ 13 десятковъ и 13 единицъ, т.-е. равна 143. По суммѣ и разности двухъ чиселъ легко найти и самыя числа. Меньшее число, обратное искомому, будетъ $\frac{143-27}{2}=58$, а потому искомое число будетъ 85.

23.

Перемножить числа 235 и 433, написанныя по семиричной системѣ счисленія, не переводя ихъ въ десятичную.

Рѣшеніе. Произведеніе напишется также по семиричной системѣ. При перемноженіи надо руководствоваться тѣмъ, что каждыя 7 единицъ какого-нибудь разряда составляютъ единицу слѣдующаго разряда. Дѣйствіе расположится такъ:

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times 433 \\ \hline 1041 \\ 1041 \\ 1306 \\ \hline 142351 \end{array}$$

Искомое произведеніе $(142351)_7$.

24.

Въ 1898 году мнѣ было столько лѣтъ, сколько единицъ въ суммѣ цифръ года моего рожденія; къ 1 февраля 1914 года число мѣсяцевъ, прошедшихъ послѣ ближайшаго, отпразднованнаго мною дня рожденія, равнялось суммѣ первой и послѣдней цифръ года моего рожденія, а число дней, считая отъ послѣдняго дня рожденія, равнялось числу, составленному изъ тѣхъ же цифръ. Когда я родился?

Рѣшеніе. Двѣ первыя цифры искомаго года мы знаемъ, такъ какъ лицо, о которомъ идетъ рѣчь, нужно полагать, родилось въ 19-омъ столѣтіи. Найдемъ двѣ послѣднія цифры. Сумма этихъ двухъ цифръ не можетъ быть больше, чѣмъ $2 \cdot 8 = 16$ (1889 годъ не можетъ служить отвѣтомъ на задачу, такъ какъ $1898 - 1889 = 9$, а въ 1898 году лицо во всякомъ случаѣ было старше 9-ти лѣтъ). Если изъ 1898 отнимемъ $1+8+16$, то узнаемъ, что лицо это родилось во всякомъ случаѣ не раньше 1873 года. Допустимъ, что оно родилось между 1873 и 1879 годами. Вычитаемъ изъ 1898 сумму $1+8+7$ и получаемъ 1882. Въ 1882 году лицу, повидимому, было столько лѣтъ отъ роду, сколько единицъ въ

послѣдней цифрѣ искомаго года рожденія. Эта цифра равна $\frac{1882-1870}{2}=6$, а искомый годъ рожденія есть, слѣдовательно, 1876. Можно было бы предположить еще, что лицо родилось между 1880 и 1889 годами, но, разсуждая по предыдущему, мы не найдемъ соотвѣтствующаго рѣшенія. По году рожденія не трудно найти также мѣсяцъ и день. Данное лицо родилось 16 іюня 1876 года.

25.

Доказать, что всякое число есть сумма различныхъ степеней двухъ или эта сумма, сложенная съ единицей.

Рѣшеніе. Всякое нечетное число, написанное по системѣ счисленія 2, можно представить въ видѣ:

$$2^m+2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots+2^2+2^1+1,$$

а четное—въ видѣ:

$$2^m+2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots 2^2+2^1;$$

напр., $27=2^4+2^3+2+1$ или $18=2^4+2$.

26.

Доказать, что число 144 будетъ точнымъ квадратомъ во всякой системѣ счисленія.

Рѣшеніе. Принимая за основаніе счисленія x, могущее получить значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, за исключеніемъ 1, 2 и 3, найдемъ, что $(144)_x=x^2+4x+4=(x+2)^2$.

27.

Первыя девять цифръ, напечатанныя на отдѣльныхъ билетахъ, были розданы тремъ лицамъ, по три каждому, такъ, что сумма цифръ у каждаго была одна и та же. Изъ этихъ цифръ каждое лицо составило наименьшее трехзначное число и записало его. Послѣ

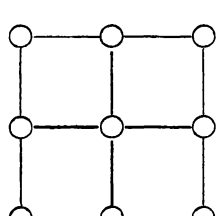
этого билеты были снова смѣшаны и розданы такимъ же образомъ, при чемъ оказалось, что каждый получилъ по одной цифрѣ, уже бывшей у него вначалѣ, и что сумма полученныхъ каждымъ цифръ была опять одинакова. Когда каждое лицо сложило оба записанныхъ имъ трехзначныхъ числа, то полученныя суммы у всѣхъ трехъ лицъ оказались равными 516. Какія числа были составлены тремя лицами въ первый и второй разъ?

Рѣшеніе. Изъ трехзначныхъ чиселъ, начинающихся съ цифръ 1, 2 или 3, условіямъ задачи удовлетворяютъ соотвѣтственно только числа 159 и 168, 267 и 249, 348 и 357. Число 456, а также числа, начинающіяся съ цифръ 5, 6, 7 и т. д., условіямъ задачи не удовлетворяютъ, такъ какъ разность между 516 и каждымъ изъ нихъ не будетъ трехзначнымъ числомъ. Слѣдовательно, въ первый разъ были составлены числа 159, 267, 348, а во второй разъ—числа 168, 249, 357, или наоборотъ.

28.

Если нѣкоторое число мѣдныхъ копеекъ расположить въ видѣ квадрата, то 5 копеекъ останутся лишними; если же сторону этого квадрата увеличить на одну копейку, то не хватитъ 8 монетъ. Опредѣлить число раскладываемыхъ монетъ.

Рѣшеніе. Вообразимъ себѣ квадратъ 3×3 въ видѣ девяти кружковъ. Для того, чтобы получить квадратъ, сторона котораго на единицу больше, надо прибавить съ двухъ смежныхъ сторонъ по 3 кружка и, кромѣ того, 1 кружокъ между ними въ уголъ. Такъ же получимъ и квадратъ со сторонами въ 5, 6 и т. д. кружковъ изъ предыдущаго. Отсюда вытекаетъ общее правило: разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ равна удвоенному мень-



шему числу, сложенному съ единицей. Напр.,

$$4^2—3^2=16—9=7=2\,.\,3+1.$$
$$5^2—4^2=25—16=9=2\,.\,4+1\ldots \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, при рѣшеніи нашей задачи разсуждаемъ такъ: Чтобы построить большій квадратъ, намъ надо добавить 5+8=13 монетъ. Въ данномъ случаѣ число 13 выражаетъ разность двухъ послѣдовательныхъ квадратовъ. Согласно предыдущему, сторона меньшаго квадрата равна $\frac{13-1}{2}=6$ монетамъ. Полагая, что монеты были разложены не только по сторонамъ квадрата, а такъ, что они находились и внутри его, имѣемъ, что всего монетъ было: $6\,.\,6+5=41$.

Если же монеты были расположены только по сторонамъ квадрата, то ихъ было: $2.6+2.4+5=25$.

29.

Найти трехзначное число, зная, что сумма всевозможныхъ двузначныхъ чиселъ, составленныхъ изъ цифръ этого числа, равна удвоенному искомому трехзначному числу.

Рѣшеніе. Взявъ какое-нибудь произвольное число, напр. 123, образуемъ изъ его цифръ всевозможныя двузначныя числа. Ихъ будетъ 6 слѣдующихъ:

12; 21; 13; 31; 23; 32 . . . . . (1)

Сложивъ всѣ эти 6 двузначныхъ чиселъ, имѣемъ:

$$12+21+13+31+23+32=132=11\,.\,12=22\,.\,6=22(1+2+3). \quad (2)$$

Возьмемъ число 247; образуемъ двузначныя числа:

27; 72; 24; 42; 47; 74 . . . . . (3)

Складываемъ ихъ:

$$27+72+24+42+47+74=286=22.13=22(2+4+7) \quad (4)$$

Изъ равенствъ (2) и (4) видимъ, что сумма всѣхъ двузначныхъ чиселъ въ 22 раза больше суммы цифръ даннаго трехзначнаго числа.

Слѣдовательно, данная задача сводится къ нахожденію такого трехзначнаго числа, которое было бы равно суммѣ его цифръ, увеличенной въ 11 разъ, такъ какъ оно должно быть вдвое меньше этой суммы. Такое число должно быть кратнымъ одиннадцати.

Сумма цифръ искомаго числа не должна превышать суммы трехъ девятокъ (наибольшее трехзначное число есть 999), т.-е. она не можетъ быть больше 27, а самое число, какъ кратное 11, не будетъ больше $27.11=297$.

Такъ какъ между числами 100 и 297 числа 199 и 289 имѣютъ наибольшую сумму цифръ (19), то число $11.19=209$ должно быть крайнимъ предѣломъ искомаго числа.

Это число должно быть кратнымъ 11, а потому находится въ ряду:

11.10; 11.11; 11.12; 11.13; 11.14; 11.15; 11.16; 11.17; 11.18; 11.19.

Перемножая числа написаннаго ряда, имѣемъ:

110; 121; 132; 143; 154; 165; 176; 187; 198; 209 . (5)

Замѣтивъ, что сумма цифръ искомаго числа должна быть болѣе 9, такъ какъ $9.11=99$ представляетъ только двузначное число, исключаемъ изъ ряда (5) числа, сумма цифръ которыхъ меньше 9.

Послѣ этого останется рядъ:

154; 165; 176; 187; 198; 209 . . . . . (6)

Ищемъ въ ряду (6) такія числа, которыя равны суммѣ цифръ, увеличенной въ 11 разъ; тогда числа

154, 165, 176, 187 и 209 . . . . . (7)

не будутъ удовлетворять этому условію и у насъ останется единственное число 198, которое удовлетворяетъ поставленному условію, т.-е.

$$198=11.18=11.(1+9+8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Дѣйствительно

$$\frac{18+81+19+91+89+98}{2}=\frac{396}{2}=198. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

30.

Нѣкоторое число оканчивается цифрой 3. Если переставить эту цифру на первое мѣсто, то число увеличится въ два раза. Найти это число.

Рѣшеніе. Такъ какъ искомое число при перенесеніи послѣдней цифры 3 на первое мѣсто удваивается, то его предпослѣдняя цифра есть 6. Повторяя то же разсужденіе и дальше, найдемъ, что цифра, предшествующая шестеркѣ, должна быть 2, а передъ ней 5 и т. д. Наименьшимъ числомъ, удовлетворяющимъ условіямъ задачи, будетъ слѣдующее:

157 894 736 842 105 263.

31.

Найти наименьшее число, дающее при дѣленіи на 11 и на 13 въ остаткѣ 1, а при дѣленіи на 17 въ остаткѣ 11.

Рѣшеніе. Найдемъ раньше рядъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 11 и 13 даютъ въ остаткѣ 1. Наименьшее число этого ряда есть $11.13+1=144$, слѣдующее большее $144+11.13=287$, третье число ряда $144+2.11.13=430$ и т. д.

Получимъ рядъ чиселъ: 144, 287, 430.....

Далѣе, изъ каждаго члена этого ряда вычитаемъ по 11 и получаемъ новый рядъ: 133, 276, 419.....

Вопросъ сводится теперь къ отысканію наименьшаго числа этого ряда, дѣлящагося нацѣло на 17. Не трудно сообразить, что любое число этого ряда можетъ быть получено, какъ сумма перваго числа ряда и произведенія, полученнаго отъ умноженія 143 на число членовъ, стоящихъ впереди искомаго члена ряда. Составимъ, напримѣръ, 10-й членъ ряда; найдемъ:

$$133+9.143$$

или

$$(17.7+14)+9.(17.8+7)=$$

$$17.7+9.17+7.2+7.9=17(7+9)+7(2+9)$$

Чтобы изъ этого числа получить число, дѣлящееся нацѣло на 17, достаточно замѣнить 9 во второмъ слагаемомъ числомъ 15; отсюда видно, что на 17 дѣлится 16-й членъ нашего ряда. Задачѣ, очевидно, удовлетворяетъ число $(133+15.143)+11=2289$.

32.

Представить дробь $\frac{155}{256}$ въ видѣ дроби, аналогичной десятичной, но написанной по восьмиричной системѣ счисленія.

Рѣшеніе. Всякую десятичную дробь, напр. 0,53821, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$0{,}53821=\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{2}{10000}+\frac{1}{100000} \quad \ldots (1)$$

или

$$0{,}53821=\frac{5}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{1}{10^5} \quad \ldots . (2)$$

Напишемъ данную дробь $\frac{155}{256}$ аналогично десятичной, т.-е. такъ же, какъ представлена дробь 0,53821 въ строкѣ (2). Имѣемъ:

$$\frac{155}{256}=\frac{t}{8}+\frac{t_1}{8^2}+\frac{t_2}{8^3}+\frac{t_3}{8^4}+\cdots$$

гдѣ t, t_1, t_2 и т. д. неизвѣстныя цифры этой дроби, написанной по восьмиричной системѣ счисленія.

Умножая на 8 обѣ части, имѣемъ:

$$\frac{155}{128}=t+\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\frac{t_3}{8^3}+\cdots$$

или

$$\frac{155}{128}=1+\frac{27}{128}=t+\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\cdots$$

Отсюда видимъ, что $t=1$.

Слѣдовательно,

$$\frac{27}{128}=\frac{t_1}{8}+\frac{t_2}{8^2}+\frac{t_3}{8^3}+\cdots$$

Умножая обѣ части на 8, имѣемъ:

$$\frac{27}{16}=1+\frac{11}{16}=t_1+\frac{t_2}{8}+\frac{t_3}{8^2}+\cdots$$

Откуда

$$t_1=1.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{11}{16}=\frac{t_2}{8}+\frac{t_3}{8^2}+\cdots$$

Умножая снова на 8, имѣемъ:

$$\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}=t_2+\frac{t_3}{8}+\frac{t_4}{8^2}+\cdots$$

Откуда $t_2=5.$

Слѣдовательно, $\frac{1}{2}=\frac{t_3}{8}+\frac{t_4}{8^2}+\cdots$

Снова умножая на 8, имѣемъ:

$$4=t_3+\frac{t_4}{8}+\cdots$$

Отсюда $t_3=4$, а остальная сумма, т.-е. $\frac{t_4}{8}+\frac{t_5}{8^2}+\cdots=0.$

Итакъ, $\frac{155}{256}=\frac{t}{8}+\frac{t_1}{8^2}+\frac{t_2}{8^3}+\cdots=\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{4}{8^4}=(0,1154)_8.$

Задачи-парадоксы.

33.

Отецъ завѣщалъ своимъ тремъ сыновьямъ 19 лошадей, при чемъ старшій братъ долженъ былъ получить $^1/_2$, средній $^1/_4$, а младшій $^1/_5$ наслѣдства. Послѣ смерти отца сыновья не могли подѣлить между собою лошадей и обратились за совѣтомъ къ лучшему пріятелю покойнаго отца. Тотъ присоединилъ къ 19 лошадямъ свою лошадь и подѣлилъ весь табунъ, согласно завѣщанію. Старшій братъ получилъ 10, средній 5, а младшій 4 лошади, а всего, значитъ, 19 лошадей. Оставшаяся лошадь была возвращена ея владѣльцу. Почему такъ получилось?

Рѣшеніе. Завѣщателемъ была сдѣлана ошибка: онъ упустилъ изъ виду, что сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ не составляетъ цѣлой единицы, а только $\frac{19}{20}$ ея. Это обстоятельство учелъ пріятель и предложилъ присоединить свою лошадь къ табуну, будучи заранѣе увѣренъ, что получитъ ее обратно, такъ какъ между братьями будутъ подѣлены только $\frac{19}{20}$ всего табуна.

34.

Торговка имѣла въ двухъ корзинахъ яблоки, по 30 штукъ въ каждой. Изъ первой корзины она разсчитывала давать 2 яблока на 1 коп., а изъ второй 3 яблока на 1 коп. Такимъ образомъ за всѣ яблоки первой корзины торговка должна была выручить 30 : 2=15 коп., а за яблоки второй корзины 30 : 2= =10 коп., а всего за всѣ 60 яблокъ 25 коп. Передъ уходомъ на базаръ торговка зашла къ сосѣдкѣ; та убѣдила ее переложить всѣ яблоки въ одну корзину и продавать каждый пятокъ по 2 копейки. Послѣ продажи оказалось, что торговка выручила не 25 коп., какъ она разсчитывала, а 24 коп. [(60 : 5)×2]. Куда дѣвалась копейка?

Рѣшеніе. Изъ первой корзины по 2, а изъ второй по 3 яблока одновременно торговка можетъ вынимать только 10 разъ. За оставшіяся въ первой корзинѣ 10 яблокъ торговка должна была выручить 5 коп., а на самомъ дѣлѣ, смѣшавъ оба сорта яблокъ въ одной корзинѣ, выручила только 4 коп., т.-е. потеряла копейку.

35*).

Ахиллесъ передвигается въ 100 разъ скорѣе черепахи, находящейся впереди него на 100 саженъ. Когда Ахиллесъ пройдетъ 100 саженъ, черепаха будетъ находиться впереди него на 1 сажень. Если Ахиллесъ пройдетъ эту 1 сажень, то все-таки не догонитъ черепахи, такъ какъ она въ это время успѣетъ перемѣститься на $^1/_{10}$ саж. Ахиллесъ пройдетъ и эту $^1/_{10}$ саж., но черепаха очутится все-таки впереди него на $^1/_{100}$ саж. и т. д. Разстояніе между Ахиллесомъ и черепахой будетъ все больше и больше уменьшаться, но никогда не обратится въ нуль, т.-е. Ахиллесъ никогда не догонитъ черепахи.

Разъясненіе. Къ такому нелѣпому результату мы приходимъ только потому, что разсматриваемъ непрерывно совершающееся движеніе, какъ прерывное.

---

*) Софизмъ Зенона.

36.

Докажемъ, что $5=6$.

Возьмемъ тождество: $35+10-45=42+12-54$.

Въ каждой части этого тождества вынесемъ общаго множителя за скобки:

$$5(7+2-9)=6(7+2-9).$$

Теперь раздѣлимъ обѣ части полученнаго равенства на ихъ общаго множителя $7+2-9$

$$\frac{5(7+2-9)}{7+2-9}=\frac{6(7+2-9)}{7+2-9}.$$

Произведя соотвѣтствующее сокращеніе въ первой и второй части равенства, получимъ:

$$5=6.$$

Разъясненіе. Къ такому нелѣпому выводу мы пришли только потому, что раздѣлили обѣ части равенства на выраженіе $7+2-9$, равное нулю.

37.

Покажемъ теперь, что $2\times 2=5$.

Для этого напишемъ тождество

$$4:4=5:5 \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (1)$$

Вынеся изъ каждой части написаннаго тождества общаго множителя за скобки, будемъ имѣть:

$4(1:1)=5(1:1)$ . . . (2) или $(2\times 2)(1:1)=5(1:1)$ . . . (3).

Такъ какъ выраженія, стоящія въ скобкахъ, равны, единицы, то

$$2\times 2=5.$$

Разъясненіе. Ошибка очевидна. Переходъ отъ равенства (1) къ равенству (2) невѣренъ, такъ какъ $4:4=\frac{4}{4}=4(1:4)$.

38.

Приведемъ еще слѣдующій курьезъ. Положимъ, что мы имѣемъ стаканъ, до половины наполненный водой.

Можно написать, что

стаканъ, наполовину полный = стакану, наполовину пустому.

Увеличивъ обѣ части равенства вдвое, получимъ, что

стаканъ полный = стакану пустому.

Въ чемъ здѣсь ошибка?

Алгебра.

Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

39.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}=2.$$

Рѣшеніе. Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ:

$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}\ldots}}=4$, или $x+2=4$; отсюда $x=2$.

40.

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\ldots}}}}=2.$$

Рѣшеніе. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, имѣемъ: $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}\ldots}}=4$ или $x.2=4$. Слѣдовательно, $x=2$.

41.

$$\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}}}+$$
$$+\sqrt{2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x-\sqrt{2x-\ldots}}}}=1.$$

Рѣшеніе. Пусть $\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}=y$, а $\sqrt{2x-\sqrt{2x-\ldots}}=z$, тогда (см. зад. № 39)

$$3x+y=y^2 \text{ и } 2x-z=z^2.$$

Отсюда $y=\frac{1\pm\sqrt{1+12x}}{2}$, а $z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8x}}{2}$.

Данное уравненіе равносильно уравненію: $\frac{1\pm\sqrt{1+12x}}{2}+$ $+\frac{-1\pm\sqrt{1+8x}}{2}=1$ (потому что $y+z=1$). Рѣшеніе этого уравненія не представляетъ никакихъ затрудненій. Изъ двухъ полученныхъ корней ($x_1=0$ и $x_2=10$) данному уравненію удовлетворяетъ $x=10$.

42.

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$$

Рѣшеніе. Перемножаемъ двучлены и дѣлаемъ соотвѣтствующія упрощенія; полученное уравненіе 4-ой степени

$$x^4+10x^3+35x^2+50x-96=0$$

представляемъ въ такомъ видѣ:

$$x^4+2.x^2.5x+25x^2+10x^2+50x-96=0$$

или $$(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)-96=0$$

Выраженіе x^2+5x замѣняемъ черезъ y; тогда

$$y^2+10y-96=0;\ \text{откуда}$$

$$y_1=6;\ y_2=-16.$$

Вопросъ сводится къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2+5x-6=0 \text{ и } x^2+5x+16=0, \text{ корни которыхъ}$$

$$x_1=1;\ x_2=-6;\ x_3=\frac{-5+i\sqrt{39}}{2};\ x_4=\frac{-5-i\sqrt{39}}{2}.$$

43.

$$x^4+(x-1)^4=17\ *)$$

Рѣшеніе. Данное уравненіе можно представить въ видѣ:

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=17$$

откуда обозначая $x-\frac{1}{2}$ черезъ y получаемъ:

$$\left[\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2+\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2=17$$

---

*) Рекомендуется рѣшить, не прибѣгая къ разложенію на простыхъ множителей.

или $\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)^2=17$ или

$$\left(y^4+y^2+\frac{1}{16}+2y^3+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)+\left(y^4+y^2+\frac{1}{16}-2y^3+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}\right)=17.$$

Отсюда, по упрощеніи, получимъ биквадратное уравненіе:

$$2y^4+3y^2-16^7/_8=0, \text{ гдѣ } y_{1,2}=\pm\frac{3}{2} \text{ и } y_{3,4}=\pm\frac{i\sqrt{15}}{2}.$$

Данное уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня: $x_1=2$; $x_2=-1$; $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$.

44.

$$\sqrt[3]{x-1}=x-7.$$

Рѣшеніе. Представимъ данное уравненіе въ видѣ

$$\sqrt[3]{x-1}=(x-1)-6$$

и положимъ, что $\sqrt[3]{x-1}=y$.

Тогда $y=y^3-6$; $y^3-y=6$ или

$$y(y+1)(y-1)=1\,.\,2\,.\,3.$$

Такъ какъ правая и лѣвая части уравненія представляютъ собой произведенія трехъ послѣдовательныхъ чиселъ, то $y=2$. Отсюда $\sqrt[3]{x-1}=2$, а $x=9$.

Возвышая данное уравненіе въ кубъ и пользуясь теоремой Безу, найдемъ еще два мнимыхъ корня: $x_{2,3}=6\pm i\sqrt{3}$.

45.

$$x^3-x-336=0.$$

Рѣшеніе. $x^3-x-336=x(x+1)(x-1)-8\,.\,7\,.\,6=0$

или $(x-1)\,.\,x\,.\,(x+1)=6\,.\,7\,.\,8$

отсюда $x_1=7$. Имѣются еще два мнимыхъ корня: $x_{2,3}=\frac{-7\pm i\sqrt{123}}{2}$.

46.

$$(x-1)(x-3)(x-4)=72.$$

Рѣшеніе. Такъ какъ $(x-1)(x-3)(x-4)=6\,.\,4\,.\,3=(7-1)(7-3)(7-4)$, то $x=7$. Пользуясь теоремой Безу, легко понизить степень даннаго уравненія на единицу, послѣ чего получится квадратное уравненіе съ двумя мнимыми корнями:

$$x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{23}}{2}.$$

47.

$$9x^3-13x-6=0\ *)$$

Рѣшеніе. Дѣлимъ обѣ части даннаго уравненія на $9x$ (это допустимо, такъ какъ $x\neq 0$); тогда

$$x^2-\frac{2}{3x}-\frac{13}{9}=0 \quad \text{или} \quad x^2-\frac{2}{3x}-1-\frac{4}{9}=0.$$

Отсюда $$\left(x^2-\frac{4}{9}\right)-\left(\frac{2}{3x}+1\right)=0 \quad \text{или}$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{x}\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$$

или $$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

Рѣшая полученное уравненіе найдемъ: $x_1=-\frac{2}{3}$; $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.

48.

$$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=2$$

Рѣшеніе. Пусть $\frac{x+2}{x-2}=y$. При такой замѣнѣ данное уравненіе сведется къ уравненію: $y+\frac{1}{y}=2$, корни котораго суть

*) Рѣшить, не пользуясь теоремой Безу.

$y_1=y_2=1$. Слѣдовательно $\frac{x+2}{x-2}=1$ или $\frac{x+2}{x-2}-1=\frac{x+2-x+2}{x-2}=$

$=\frac{4}{x-2}=0$. Это уравненіе удовлетворяется только при $x-2=\infty$, т.-е. при $x=\infty$.

49.

$$x^3+4x^2+6x+4=0 \text{ *)}$$

Рѣшеніе. Умножаемъ обѣ части уравненія на x и затѣмъ прибавляемъ къ обѣимъ частямъ по единицѣ (умноженіемъ на x вводимъ лишній корень $x=0$):

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=1 \text{ или}$$

$$(x+1)^4=1;\ x+1=\sqrt[4]{1}.$$

Слѣдовательно, $x_1=-2$; $x_2=i-1$; $x_3=-(i+1)$.

50.

$$x^4+5x-6=0 \text{ *)}.$$

Рѣшеніе. Помноживъ данное уравненіе на 4, запишемъ его въ видѣ:

$4x^4+4x^2+1-4x^2+20x-24-1=0$, т.-е. $4x^4+4x^2+1-$
$-(4x^2-20x+25)=0$

или $(2x^2+1)^2-(2x-5)^2(2x^2+1+2x-5)(2x^2+1-2x+5)=0$.

Итакъ, данное уравненіе распадается на два квадратныхъ уравненія: $2x^2+2x-4=0$ и $2x^2-2x+0=0$, рѣшая которыя находимъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня даннаго уравненія, именно:

$$x_1=1,\ x_2=-2\ x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2}.$$

51.

$$x^3-3x^2-3x-4=0 \text{ *)}.$$

Рѣшеніе. Записавъ данное уравненіе въ видѣ

$$(x^3-4x^2)+(x^2-3x-4)=0=x^2(x-4)+(x+1)(x-4).$$

---

*) Рѣшить, не пользуясь теоремой Безу.

или $(x-4)(x^2+x+1)=0$, находимъ, что x удовлетворяетъ одному изъ двухъ уравненій: $x-4=0$ и $x^2+x+1=0$.

Отсюда $x_1=4 \quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

52.

$$x^4+2x^4+24x+37=0.$$

Рѣшеніе. Представляя данное уравненіе въ видѣ: $x^4+2x^2+24x+37=x^4+14x^2+49-12x^2+24x-12=(x^2+7)^2-12(x^2-2x+1)=(x^2+7)^2-12(x-1)^2=[x^2+7+\sqrt{12}(x-1)][x^2+7-\sqrt{12}(x-1)]=0$, мы видимъ, что оно распадается на два квадратныхъ уравненія

$$x^2+7+\sqrt{12}x-\sqrt{12}=0 \quad \text{и} \quad x^2+7-\sqrt{12}x+\sqrt{12}=0.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ $x_{1,2}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{\sqrt{12}-1}$ и $x_{3,4}=\sqrt{3}\pm\sqrt{\sqrt{12}-4}$.

53.

$$x^6-6x^4+8x^2+3=0.$$

Рѣшеніе. Данное уравненіе представляемъ въ видѣ: $x^6-x^4+8x^2+3=x^6-6x^4+9x^2-x^2+3=x^2(x^4-6x^2+9)-(x^2-3)=x^2(x^2-3)^2-(x^2-3)=(x^2-3)(x^4-3x^2-1)=0$.

Отсюда $x^2-3=0$ и $x^4-3x^2-1=0$. Слѣдовательно,

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}, \quad x_{3,4,5,6}=\pm\frac{\sqrt{3\pm\sqrt{13}}}{2}.$$

Системы уравненій.

54.

Найти дѣйствительные корни системы уравненій:

$$x^2+y=18; \quad x+y^2=8.$$

Рѣшеніе. Данныя уравненія можно представить такъ:

$$x^2-16=2-y; \; y^2-4=4-x \text{ или}$$

$$(x+4)(x-4)=2-y; \; (y+2)(y-2)=4-x.$$

Перемножаемъ оба уравненія: $(x+4)(x-4)(y+2)(y-2)=(4-x)(2-y)$ или $(x+4)(x-4)(y+2)(y-2)-(x-4)(y-2)=0$; $(x-4)(y-2)[(x+4)(y+2)-1]=0$. Отсюда $x=4$; $y=2$.

55.

$$x^2 + xy = 35;\ xy - 2y^2 = 2.$$

Рѣшеніе. Данныя уравненія умножаемъ соотвѣтственно на 2 и 35 и вычитаемъ второе изъ перваго; получаемъ: $2x^2 - 33xy + 70y^2 = 0$.

Пусть $x = ty$; тогда имѣемъ:

$$2t^2y^2 - 33ty^2 + 70y^2 = 0 \text{ или}$$

$$2t^2 - 33t + 70 = 0, \text{ откуда } t_1 = 14;\ t_2 = \frac{5}{2},$$

а, слѣдовательно, $x_1 = 14y;\ x_2 = \frac{5}{2}y$.

Подставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій соотвѣтственно значенія x_1 и x_2, найдемъ для y значенія:

$y_{1,2} = \pm 2$ и $y_{3,4} \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$, а отсюда $x_{1,2} = \pm 5$ и $x_{3,4} = \pm \frac{7\sqrt{6}}{3}$.

56.

$$\frac{x^2 + xy}{y^2} + \frac{y^2 + xy}{x^2} = 6^3/_4;\ x + y = 6.$$

Рѣшеніе. Представляемъ первое уравненіе въ видѣ

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = 6^3/_4$$

и полагаемъ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = z$; тогда

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = z^2 - 2.$$

Первое наше уравненіе сводится къ уравненію $z^2 + z - 8^3/_4 = 0$, корни котораго $z_1 = \frac{5}{2}$, и $z_2 = -\frac{7}{2}$.

Отсюда $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \ldots (1);\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{7}{2} \ldots (2)$.

Уравненіе (1), по упрощеніи, принимаетъ видъ:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}xy = 0 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Второе данное уравненіе $x+y=6$ возвысимъ въ квадратъ и вычтемъ изъ уравненія (3), получимъ $xy=8$.

Рѣшая совмѣстно уравненія $x+y=6$ и $xy=8$, получимъ $x_1=2$; $y_1=4$. Аналогичнымъ путемъ найдемъ $x_2=3+\sqrt{33}$, $y_2=3-\sqrt{33}$.

57.

$$x^3+y^3+z^3=1;\ x^2+y^2+z^2=1;\ x+y+z=1.$$

Рѣшеніе. Первое уравненіе представляемъ въ видѣ

$$x^3+y^3=1-z^3 \text{ или } (x+y)(x^2-xy+y^2)=1-z^3,$$

но $x+y=1-z$ и $x^2+y^2=1-z^2$. Остается выразить xy черезъ z.

Для этого возвысимъ третье уравненіе въ квадратъ и замѣнимъ $x^2+y^2+z^2$ единицей; получимъ $xy+xz+yz=0$ или $xy+z(x+y)=xy+z(1-z)=0$; отсюда $xy=z(z-1)$. Теперь имѣемъ уравненіе $(1-z)(1-2z^2+z)=1-z^3$, корни котораго $z_1=1$, $z_{2,3}=0$. Теперь не трудно уже найти значенія для x и y.

Изъ трехъ неизвѣстныхъ x, y и z два должны одновременно равняться нулю, а третье—единицѣ.

58.

$$8y(x+y+\sqrt{x^2-y^2})=9(x+y)(x+y-\sqrt{x^2-y^2});$$
$$(x^2-y)^2+(x-y)-506=2x(x^2+y).$$

Рѣшеніе. Преобразуемъ первое изъ данныхъ уравненій при помощи того свойства пропорціи, по которому $\frac{a+b}{a-b}=\frac{p+q}{p-q}$, если $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$.

Преобразованіе даетъ:

$$\frac{x+y+\sqrt{x^2-y^2}}{x+y-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{9x+9y}{8y}=\frac{2(9x+9y)}{2\,.\,8y}=\frac{18x+18y}{16y}=$$
$$=\frac{9x+17y+9x+y}{9x+17y-9x-y}=\frac{(9x+17y)+(9x+y)}{(9x+17y)-(9x+y)} \quad \ldots \quad (1)$$

Откуда
$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{9x+17y}{9x+y} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Возведя обѣ части въ квадратъ и сокращая лѣвую часть равенства, имѣемъ:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{81x^2+289y^2+306xy}{81x^2+y^2+18xy} \quad \ldots\ldots (3)$$

Приведя къ общему знаменателю и произведя сокращенія, будемъ имѣть:

$$126x^2-36xy-290y^2=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Полагая $x=ty$, имѣемъ:

$$126t^2y^2-36ty^2-290y^2=0 \quad \ldots\ldots (5)$$

или $$126t^2-36t-290=0 \quad \ldots\ldots (6)$$

Откуда $$t_1=\frac{5}{3};\quad t_2=\frac{29}{21}. \quad \ldots\ldots (7)$$

Слѣдовательно, $$x_1=\frac{5}{3}y;\quad x_2=\frac{29}{21}y \quad \ldots\ldots (8)$$

Второе изъ данныхъ ур-ій преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$(x^2+y)^2+x-y-2x(x^2+y)=506$$

или, прибавляя и вычитая по 2^2 въ лѣвой части, имѣемъ:

$$[(x^2+y)^2-2x(x^2+y)+x^2]-x^2-y+x=506$$

или $$(x^2+y-x)^2-(x^2+y-x)=506 \quad \ldots\ldots (9)$$

Положимъ $x^2+y-x=z$, тогда

$$z^2-z-506=0 \quad \ldots\ldots (10)$$

Откуда $$z_1=23;\quad z_2=-22. \quad \ldots\ldots (11)$$

Далѣе рѣшаемъ ур-іе

$$x^2+y-x=z \quad \ldots\ldots (12)$$

вставляя вмѣсто z найденныя значенія изъ (11), а вмѣсто x выраженіе его черезъ y изъ (8). Тогда при $z=23$ и $x=\frac{5}{3}y$, имѣемъ:

$$y_1=3;\quad y_2=-\frac{69}{25},$$

а, слѣдовательно, $$x_1=5;\quad x_2=-\frac{23}{5}. \quad \ldots\ldots (13)$$

при $z=-22$ и $x=\frac{5}{3}y$ имѣемъ:

$$x=\frac{1\pm 3i\sqrt{61}}{25};\quad y=\frac{3\pm 9i\sqrt{61}}{25}. \quad \ldots\ldots (14)$$

Если для x взять значеніе $x=\frac{29}{21}y$, то, подставляя сперва $z=23$, а затѣмъ $z=22$, получимъ два значенія мнимыхъ и два ирраціональныхъ. То же будетъ и для y.

Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленныя уравненія:

59.

$$4x^2-3xy-y=20.$$

Рѣшеніе. Опредѣляемъ изъ даннаго уравненія y:

$$y=\frac{4x^2-20}{3x+1}=\frac{4x}{3}-\frac{4}{9}-\frac{176}{9(3x+1)} \text{ или } 9y=12x-4-\frac{176}{3x+1}.$$

Чтобы y было цѣлымъ, необходимо и достаточно, чтобы $3x+1$ было дѣлителемъ 176; отсюда заключаемъ, что $3x+1$ должно равняться 1, 2, 4, 11, 16, 22, 44, 88 или 176.

Не трудно убѣдиться, что въ данномъ случаѣ годятся только дѣлители 4, 16, 22 и 88. Уравненію удовлетворяютъ

$x=1$, 5, 7 и 29, $y=4$, 5, 8 и 38.

60.

$$8x+12y+15z=75.$$

Рѣшеніе. Рѣшая данное ур-іе относительно x, находимъ:

$$x=\frac{75-12y-15z}{8}=9-y-2z+\frac{z-4y+3}{8} \quad \ldots \quad (1)$$

или $$x=9-y-2z+t \quad \ldots \quad (2)$$

гдѣ $$t=\frac{z-4y+3}{8} \quad \ldots \quad (3)$$

Изъ ур-ія (3) имѣемъ:

$$z=4y+8t-3 \quad \ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно, вставляя въ (2) выраженіе (4) имѣемъ:

$$x=9-y+t-2z=9-y+t-2(4y+8t-3) \quad \ldots \quad (5)$$

или $$x=3(5-3y-5t) \quad \ldots \quad (6)$$

Такъ какъ x, y и z суть числа положительныя, то

$$y\geqslant 1;\quad 4y+8t-3\geqslant 1;\quad 5-3y-5t\geqslant 1 \quad \ldots \quad (7)$$

Умноживъ первое неравенство на 3 и сложивъ его съ третьимъ, имѣемъ:

$$5-5t\geqslant 4.$$

Откуда $t\leqslant\frac{1}{5}$.

Умноживъ второе неравенство на 3, а третье на 4 и сложивъ ихъ, имѣемъ:

$$11+4t\geqslant 7.$$

Откуда $t\geqslant -1$.

Итакъ, для t имѣемъ предѣлы:

$$\tfrac{1}{5}\geqslant t\geqslant -1.$$

Слѣдовательно, t можетъ быть или 0 или—1.

При $t=0$ получимъ $y\geqslant 1$, $y\leqslant\frac{1}{3}$; $y=1$; $x=6$, $z=1$.

При $t=-1$ получимъ $y\geqslant 3$, $y\leqslant 3$, $y=3$; $x=3$; $z=1$.

61.

$$y^x=x^{y-x}.$$

Рѣшеніе. Пусть $y=xz$, тогда данное уравненіе приметъ видъ: $x^{xz}=x^{xz-x}$, откуда $xz=xz-x$ или, такъ какъ $x\neq 0$, то

$$z=x^{z-1}-1;\ \text{и}\ x=\sqrt[z-1]{z+1}=(z+1)^{\frac{1}{z-1}}$$

Не трудно видѣть, что, при $z=0$, 2 и 3, неизвѣстное x получитъ цѣлыя значенія 1, 3 и 2, а y—соотвѣтственно 1, 9, 8.

62.

Задача Эйлера.

Опредѣлить раціональныя значенія x и y, удовлетворяющія уравненію: $x^y=y^x$.

Рѣшеніе. Пусть $y=px$, тогда данное уравненіе принимаетъ видъ: $x^{px}=(px)^x$; отсюда $x^p=px$ или $x^{p-1}=p$, а $x=\sqrt[p-1]{p}=p^{\frac{1}{p-1}}$. Подставивъ значеніе x, получимъ $y=px=p^{\frac{p}{p-1}}$. Далѣе, пусть

$\frac{1}{p-1}=n$, гдѣ n какое угодно цѣлое число; тогда $p=\frac{n+1}{n}$, а, слѣдовательно, $x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и $y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

63.

Найти цѣлое значеніе для x, удовлетворяющее уравненію: $2^x=4x$.

Рѣшеніе. Согласно свойству биноміальныхъ коэффиціентовъ

$$2x=1+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\ldots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x+1.$$

Данное уравненіе представимъ такъ:

$$1+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x+1-4x=0$$

или $1-2x+x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)}{1.2}+x-2x+1+0$ или

$$1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)}{1.2}-x+1=0\ldots \quad (1)$$

Съ другой стороны

$$(1-1)^x=0=1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots-x+1\ldots (2)$$

Сравнивъ равенства (1) и (2), убѣдимся, что равенство (1) возможно только въ томъ случаѣ, когда члены $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+$ $+\ldots\ldots+\frac{x(x-1)}{1.2}$ равны нулю. Слѣдовательно, данное уравненіе $2^x=4x$ принимаетъ видъ: $1-x+\frac{x(x-1)}{1.2}-x+1=0$, откуда $x_1=4$; $x_2=1$, при чемъ данному уравненію удовлетворяетъ только $x=4$.

64.

Упростить выраженіе $3\sqrt{3}+\sqrt{43-34\sqrt{3}}$, не прибѣгая къ извлеченію корней и формулѣ $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Рѣшеніе. $3\sqrt{3}+\sqrt{43-24\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\sqrt{16-2.4.3\sqrt{3}+27}=$

$=3\sqrt{3}+\sqrt{4^2-2.4.3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2}=$

$=3\sqrt{3}+\sqrt{(4-3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{3}+4-3\sqrt{3}=4.$

65.

Упростить выраженіе $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

Рѣшеніе. Пусть $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y}$ и $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x-\sqrt{y}$

Перемножая, имѣемъ:

$$\sqrt[2]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}=x^2-y$$

или $$\sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{49-50}=\sqrt[3]{-1}=-1=x^2-y.$$

Отсюда $y=x^2+1$.

Возводя въ кубъ равенство $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y}$, имѣемъ:

$$\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=(x+\sqrt{y})^3$$

или $$7+5\sqrt{2}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y},$$

или $$7+5\sqrt{2}=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}.$$

Откуда заключаемъ, что необходимо должны соблюдаться равенства:

$$x^3+3xy=7$$

и $$(3x^2+y)\sqrt{y}=5\sqrt{2}$$

Вставляя въ ур-іе $x^3+3xy=7$ значеніе y имѣемъ:

$$x^3+3x(x^2+1)=7$$

или $$4x^3+3x+7.$$

Отсюда $x=1$, а, слѣдовательно, $y=2$.

Такимъ образомъ, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

66.

Найти безъ помощи таблицы логариѳмовъ величину выраженія $\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}$.

Рѣшеніе. Пусть: $\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}=x$; тогда

$$x^3=8+\sqrt{189}+3\sqrt[3]{(8+\sqrt{189})^2}\sqrt[3]{8-\sqrt{189}}+$$
$$+3\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}\sqrt[3]{(8-\sqrt{189})^2}+8-\sqrt{189}$$

или $x^3=16+3\sqrt[3]{(8^2-189)(8+\sqrt{189})}+3\sqrt[3]{(8^2-189)(8-\sqrt{189})}$

или $x^3=16+3\sqrt[3]{8^2-189}(\sqrt[3]{8+\sqrt{189}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{189}})$.

или $x^3=16+3\sqrt[3]{8^2-189}\,.\,x$

или $x^3=16+3.-5.x=16-15x$.

Очевидно, что $x=1$. Два остальныхъ корня ирраціональны.

67.

Сократить дробь $\dfrac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$, не производя дѣленія.

Рѣшеніе. Числитель данной дроби представляетъ частное отъ дѣленія $x^{10}-1$ на x^2-1, а знаменатель—частное отъ дѣленія x^5-1 на $x-1$, поэтому:

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}:\frac{x^5-1}{x-1}=\frac{(x^{10}-1)(x-1)}{(x^2-1)(x^5-1)}=\frac{x^5+1}{x+1}=$$
$$=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

68.

Найти $lg\ 125$, если $lg2=m$.

Рѣшеніе. $lg\ 125=lg\ 5^3=lg\left(\frac{10}{2}\right)^3$ поэтому

$$lg\left(\frac{10}{2}\right)^3=3\ lg10-3lg2=3-3m=3(1-m).$$

69.

Почему корни уравненія $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$, полученные двойнымъ возведеніемъ въ квадратъ, не удовлетворяютъ самому уравненію?

Рѣшеніе. Полученныя значенія x (=0 и 4) не удовлетворяютъ уравненію въ томъ случаѣ, когда беремъ только ариѳметическія значенія $\sqrt{5+x}$, $\sqrt{5-x}$ и $\sqrt{x}$, потому что при любомъ x лѣвая часть даннаго уравненія въ этомъ случаѣ, какъ не трудно убѣдиться, будетъ всегда больше правой.

Значенія 0 и 4 удовлетворяютъ уравненіямъ:
$+\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=+\sqrt{x}$ и $-\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=-\sqrt{x}$.

70.

Освободить отъ радикаловъ уравненіе:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}-1=0.$$

Рѣшеніе. Данное ур-іе перепишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=1-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$$

Возведя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}$$

или $$1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=1+\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}+2x.$$

или $$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}.$$

Возводя снова обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-2(x-2)\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^4}$$

или $$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-(2x-4)x+x\sqrt[3]{x}$$

или $$1+\sqrt[3]{x}=(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}-2x^2+4x+x\sqrt[3]{x}$$

или $$(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}+(x-1)\sqrt[3]{x}-(2x^2-4x+1)=0.$$

Обозначимъ $\sqrt[3]{x}$ черезъ y; тогда ур-іе (8) приметъ видъ:

$$(x-2)^2y^2+(x-1)y-(2x^2-4x+1)=0 \quad . \; . \; . \; (1)$$

Умножимъ ур-іе (1) на y, тогда

$$(x-2)^2y^3+(x-1)y^2-(2x^2-4x+1)y=0;$$

но $$y^3=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x,$$

слѣдовательно, $$(x-2)^2x+(x-1)y^2-(2x^2-4x+1)y=0 \; . \; . \; (2)$$

Умноживъ ур-іе (1) на y^2 и замѣняя y^3 черезъ x, имѣемъ:

$$(x-2)^2xy+(x-1)x-(2x^2-4x+1)y^2=0 \quad . \; . \; . \; (3)$$

Рѣшая совмѣстно ур-ія (1) и (2) и принимая за одно неизвѣстное (y), а за другое (y^2) и подставивъ ихъ значеніе въ ур-іе (3), получимъ уравненіе:

$$x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75x^2-x+1=0.$$

совершенно освобожденное отъ радикаловъ.

71.

Найти y изъ уравненія

$$lg_2 lg_2 lg_2 y=0.$$

Рѣшеніе. Пусть $lg_2 lg_2 y=s$; тогда $lg_2 s=0$ или $s=1$.

Слѣдовательно, $lg_2 lg_2 y=1$. Далѣе, пусть $lg_2 y=t$; тогда $lg_2 t=1$ или $t=2=lg_2 y$; отсюда $y=2^2=4$.

72.

Опредѣлить одинъ корень и зависимость между двумя другими въ кубичномъ уравненіи вида $x^3+ax^2+\beta x+\gamma=0$, если извѣстно, что отъ умноженія всего уравненія на множитель $(x+m)$ получается возвратное уравненіе 4-ой степени.

Рѣшеніе. Умножая кубичное уравненіе на $x+m$, получимъ возвратное уравненіе

$x^4+(a+m)x^3+(\beta+am)x^2+(\gamma+\beta m)x+\gamma m=0$; изъ разсмотрѣнія

этого ур-ія заключаемъ, что $\gamma m=1$; $\alpha+m=\gamma+\beta m$, откуда $m=\frac{1}{\gamma}$.

Такъ какъ $-m=-\frac{1}{\gamma}$ является корнемъ возвратнаго уравненія (уравненіе дѣлится на $x+m$), то кубичное уравненіе, очевидно, должно имѣть корень $x=\gamma$. Произведеніе двухъ другихъ корней даннаго кубичнаго уравненія, служащихъ также корнями возвратнаго уравненія, должно быть равно единицѣ.

73.

Дано, что x измѣняется пропорціонально y и z, а y измѣняется пропорціонально $(x+z)$, при этомъ $x=2$, если $z=2$. Каково будетъ значеніе z, если $x=9$?

Рѣшеніе. Зависимость между x y, и z выражается формулой

$$x=myz,$$

гдѣ m—коэффиціентъ пропорціональности, а зависимость между y и $(x+z)$, выражается формулой

$$y=n(x+z),$$

гдѣ n—коэффиціентъ пропорціональности.

Далѣе, $x=mn(x+z)z$; $2=mn(2+2)2$, отсюда $mn=\frac{1}{4}$.

Слѣдовательно $x=\frac{1}{4}(x+z)z$. При $x=9$, $z_1=3$, и $z_2=-12$.

Задачи на составленіе уравненій.

74.

Найти двѣ дроби, сумма которыхъ равна ихъ произведенію.

Рѣшеніе. Пусть первая дробь будетъ $\frac{a}{b}$, а вторая $\frac{x}{y}$.

Выразимъ $\frac{x}{y}$ черезъ a и b. Согласно условію,

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ax}{by} \text{ или } ay+bx=ax. \text{ Отсюда}$$

$$ay=x(a-b) \text{ или } \frac{x}{y}=\frac{a}{a-b}.$$

75.

Найти двузначное число, равное удвоенному произведенію его цифръ.

Рѣшеніе. Согласно условію, $10x+y=2xy$ или

$$5+\frac{y}{2x}=y.$$

Отсюда видимъ, что $\frac{y}{2x}$ должно быть цѣлымъ числомъ.

Пусть $\frac{y}{2x}=t$, тогда $5+t=2xt$ или $\frac{5}{t}+1=2x$.

Такъ какъ $\frac{5}{t}$ должно быть цѣлымъ числомъ, то $t_1=1$ и $t_2=5$.

При $t_1=1$, $x=3$ и $y=6$

При $t_2=5$ $x=1$ и $y=10$ (это рѣшеніе не годится, такъ какъ значеніе y меньше 10). Искомое число равно 36.

76.

Найти трехзначное число, изображеніе котораго въ плоскомъ зеркалѣ будетъ въ 7,41(6) раза болѣе самого числа.

Рѣшеніе. Согласно условію задачи,

$$7{,}41(6)[100x+10y+z]=100z+10y+x, \text{ или,}$$

по упрощеніи, $z=8x+\frac{70}{101}y$. Такъ какъ $70y$ должно дѣлиться нацѣло на 101, то $y=0$ (т.-к. $y<10$). Слѣдовательно, $x=1$ и $z=8$.

Искомое число есть 108.

77.

Найти два цѣлыхъ и положительныхъ числа, разность между которыми равна ихъ удвоенному частному.

Рѣшеніе. Если x и y искомыя числа, при чемъ $x>y$, то $x-y=2\frac{x}{y}$ (1) или $x-y=2\frac{y}{x}$ (2).

Въ первомъ уравненіи $2\frac{x}{y}$ должно быть цѣлымъ числомъ, при чемъ y не можетъ быть ни единицей, ни двумя, такъ какъ при $y=1$, $x=-1$, а при $y=2$, $x-2=x$, что невозможно.

Очевидно, x должно дѣлиться на y. Пусть $x=ty$, тогда уравненіе (1) принимаетъ видъ: $ty-y=2t$, откуда $y=\frac{2t}{t-1}$.

Въ виду того, что t и $t-1$ числа взаимно простыя, то $t-1$ должно быть дѣлителемъ 2, т.-е. $t-1=1$ или $t-1=2$.

Слѣдовательно,

$$y=4 \text{ или } y=3, \text{ а } x=8 \text{ или } x=9.$$

Въ уравненіи (2) y не можетъ дѣлиться на x, такъ какъ $x>y$, а поэтому на x должно дѣлиться 2. Слѣдовательно, $x=1$ или $x=2$; соотвѣтственно этому $y=\frac{1}{3}$ (не годится) или $y=1$.

78.

Найти двузначное число, равное произведенію суммы его цифръ на ихъ разность.

Рѣшеніе. Если x число десятковъ, а y число единицъ искомаго числа, то

$$10x+y=x^2-y^2 \text{ (1) или } 10x+y=y^2-x^2 \text{ (2), отсюда}$$

$$x=5\pm\sqrt{25+y^2+y} \quad \text{или} \quad x=-5\pm\sqrt{25-y^2-y}.$$

Такъ какъ $\sqrt{25+y^2+y}>5$, то уравненіе (1) не можетъ имѣть рѣшеній, соотвѣтствующихъ условію задачи ($0<x<10$). Уравненію (2) удовлетворяетъ $x=-5+\sqrt{25+y^2-y}=-5+$

$+\sqrt{25+y(y-1)}$, при чемъ выраженіе $\sqrt{25+y(y-1)}$ должно быть точнымъ квадратомъ, содержащимся между 25 и 97 [при $y=9$, выраженіе $25+y(y-1)=97$]. Но точные квадраты между числами 25 и 97 будутъ 36, 49, 64 и 81, изъ которыхъ только 81 удовлетворяетъ условіямъ нашей задачи. Уравненію $25+y^2-y=81$ удовлетворяетъ $y=8$. Искомое число, слѣдовательно, будетъ 48.

79.

Найти три цѣлыхъ числа, сумма квадратовъ которыхъ была бы равна квадрату даннаго числа.

Рѣшеніе. Составляемъ уравненіе $x^2+y^2+z^2=k^2$, гдѣ буквами x, y и z обозначены искомыя числа, а буквой k—данное число. Наше уравненіе будетъ удовлетворяться при условіи, если $y^2=2xz$; тогда $x^2+2xz+z^2=(x+z)^2=k^2$ или $x+z=k$. Уравненіе $y^2=2xz$ принимаетъ видъ $y^2=2x(k-x)=2kx-2x^2$. Пусть $y=\frac{m}{n}x$, гдѣ m и n произвольныя цѣлыя числа. Тогда $2kx-2x^2=\frac{m^2}{n^2}x^2$ или, по упрощеніи, $x(m^2+2n^2)=2n^2k$, откуда

$$x=\frac{2n^2k}{m^2+2n^2}.$$

Подставивъ найденное значеніе x въ уравненія $y=\frac{m}{n}x$ и $x^2+y^2+z^2=k^2$, найдемъ, что $y=\frac{2mnk}{m^2+2n^2}$ и $z=\frac{m^2k}{m^2+2n^2}$. *Чтобы x, y и z были цѣлыми, необходимо число k выбрать такъ, чтобы оно дѣлилось на m^2+2n^2.* Выбираемъ $k=m^2+2n^2$, тогда $x=2n^2$, $y=m^2$ и $z=2mn$.

80.

Сколько находится одинаковыхъ членовъ въ двухъ ариѳметическихъ прогрессіяхъ:

$$\begin{array}{l} \div\ 2;\ 7;\ 12;\ 17;\ 22;\ 27;\ldots \\ \div\ 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ldots \end{array}$$

если каждая изъ нихъ состоитъ изъ 60 членовъ?

Рѣшеніе. Пусть $(x+1)$-ый членъ 1-ой прогрессіи равенъ $(y+1)$-му члену 2-ой прогрессіи, тогда $2+5x=2+3y$ или $x=\frac{3y}{5}$. При y равномъ 5, 10, 15, 20 и т. д., x получаетъ соотвѣтственно значенія 3, 6, 9, 12 и т. д. Отсюда видимъ, что 4-ый, 7-ой, 10-ый... члены 1-ой прогрессіи будутъ равны соотвѣтственно 6-му, 11-му, 16-му... членамъ 2-ой прогрессіи. Слѣдовательно, число всѣхъ одинаковыхъ членовъ будетъ $60:6=10$.

81.

Мнѣ теперь вдвое больше лѣтъ, чѣмъ было вамъ тогда, когда мнѣ было столько, сколько вамъ теперь; а когда вамъ будетъ столько, сколько мнѣ теперь, то намъ будетъ обоимъ вмѣстѣ 63 года. Сколько лѣтъ каждому?

Рѣшеніе. Пусть мнѣ теперь x лѣтъ, а вамъ теперь y лѣтъ. Мнѣ было столько, сколько вамъ теперь $x—y$ лѣтъ тому назадъ, а вамъ тогда было $y—(x—y)$ лѣтъ. По условію задачи

$$x=2[y—(x—y)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Вамъ будетъ x лѣтъ, т.-е. столько, сколько мнѣ теперь, черезъ $x—y$ лѣтъ, мнѣ же въ то время будетъ $x+(x—y)$.

По условію задачи

$$x+[x+(x—y)]=63 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Рѣшая ур-ія (1) и (2) совмѣстно, будемъ имѣть:

$$x=28 \text{ и } y=21.$$

82.

Одинъ мальчикъ прожилъ столько будничъ дней, сколько мать его прожила воскресеній; столько сутокъ, сколько отецъ прожилъ недѣль и столько мѣсяцевъ, сколько бабушка его прожила лѣтъ. Всѣмъ имъ безъ мальчика 100 лѣтъ и 4 дня. Сколько лѣтъ

мальчику? (1 годъ=365 дней=52 недѣли=12 мѣсяцевъ.)

Рѣшеніе. Пусть x будетъ искомое число лѣтъ, прожитыхъ мальчикомъ. Тогда, по условію задачи, имѣемъ, что мальчикъ прожилъ: x лѣтъ, или $365x$ дней, или $52x$ недѣль (или воскресеній), или $12x$ мѣсяцевъ; слѣдовательно, мальчикъ прожилъ будничъ дней $365x—52x=313x$; кромѣ того, сутокъ всего онъ прожилъ $365x$, а мѣсяцевъ $52x$. Мать мальчика прожила столько воскресеній, сколько самъ мальчикъ прожилъ будничъ дней; слѣдовательно, мать прожила $313x$ воскресеній, т.-е. $313x.7$ дней. Отецъ прожилъ столько недѣль, сколько мальчикъ прожилъ сутокъ; слѣдовательно, отецъ прожилъ $365x$ недѣль, т.-е. $365x.7$ дней; бабушка прожила лѣтъ столько, сколько внукъ прожилъ мѣсяцевъ, т.-е. она прожила $12x$ лѣтъ, а слѣдовательно $12x.365$ дней. Поэтому мать, отецъ и бабушка прожили: $313.7x+365.7x+12.365x$ дней, т.-е. $2191x+2555x++4380x=9126x$ дней. По условію задачи это количество дней должно быть равно 100 лѣтамъ и 4 днямъ, т.-е. 36504 днямъ; слѣдовательно, $36504=9126x$, откуда $x=4$.

83.

Я задумалъ число; приписавъ къ нему справа 8, я прибавилъ къ результату 6; къ полученной суммѣ снова приписалъ справа 9 и прибавилъ 7; затѣмъ справа же приписалъ 4 и все раздѣлилъ на 27; тогда я, вычеркнувъ справа послѣднюю цифру, равную задуманному числу, получилъ 13. Какое число я задумалъ?

Рѣшеніе. Обозначимъ черезъ x задуманное мною число. Приписавъ къ нему 8, я цифру x перемѣстилъ на 1 разрядъ выше, слѣдовательно, получилъ число $10x+8$; прибавивъ къ результату 6, я получилъ $10x+8+6=10(x+1)+4$. (Что число x есть число однозначное слѣдуетъ изъ условія задачи). Приписавъ снова 9, получимъ:

$$10[10(x+1)+4]+8=100(x+1)+40+9,$$

а прибавивъ 7, будемъ имѣть:

$$100(x+1)+49+7=100(x+1)+56.$$

Приписавъ справа 4, я получилъ

$$10[100(x+1)+56]+4=1000(x+1)+564.$$

Раздѣливъ на 27, я имѣлъ:

$$\frac{10000(x+1)+564}{27},$$

вычеркнувъ же послѣднюю цифру, равную x, я имѣлъ

$$\frac{\frac{1000(x+1)+564}{27}-x}{10}=\frac{1000(x+1)+564}{270}-\frac{x}{10}.$$

Согласно условію, $\frac{100(x+1)+564}{270}-\frac{x}{10}=13$, откуда $x=2$.

84.

Ювелиръ продалъ каждому изъ покупателей столько колецъ, сколько у него всего было покупателей, при чемъ за каждое кольцо взялъ столько рублей, сколько колецъ продалъ каждому. Часть вырученной суммы денегъ ювелиръ издержалъ на покупку десяти браслетовъ. За каждый браслетъ онъ заплатилъ число рублей, меньшее числа браслетовъ, но каждый изъ нихъ стоилъ дороже кольца. Оставшаяся у ювелира сумма денегъ была меньше цѣны браслета. Опредѣлить стоимость кольца и браслета.

Рѣшеніе. Обозначимъ черезъ x цѣну кольца, черезъ y цѣну браслета, а черезъ z оставшуюся у ювелира сумму денегъ. Тогда, согласно условію задачи,

$$x^3=10y+z.$$

Такъ какъ правая часть равенства должна быть двузначнымъ числомъ ($z<y<10$) и, кромѣ того, точнымъ кубомъ, то она можетъ быть равна 27 или 64. Изъ этихъ двухъ чиселъ 27 не годится, такъ какъ $z<y$. Слѣдовательно, $x^3=64=10y+z$, откуда $x=4$, $y=6$; $z=4$.

85.

Количество мѣди въ слиткѣ составляетъ столько процентовъ количества чистаго золота, сколько единицъ содержится въ нумерѣ пробы этого слитка. Опредѣлить пробу слитка.

Рѣшеніе. Обозначимъ искомую пробу черезъ x, т.-е. будемъ считать, что на каждые 96 золотниковъ слитка приходится x золотниковъ чистаго золота. По условію задачи количество мѣди составляетъ $x\%$ количества чистаго золота. Слѣдовательно, на 100 золотниковъ золота приходится x золотниковъ мѣди, а на x золотниковъ золота приходится $\frac{x \cdot x}{100}$ золотниковъ мѣди. Получаемъ уравненіе: $x+\frac{x^2}{100}=96$, откуда $x=60$. Второй корень, какъ отрицательный, не соотвѣтствуетъ условію задачи.

86.

Лисица травится борзою собакой. Въ началѣ травли лисица находилась отъ собаки на разстояніи 60 прыжковъ. Лисица дѣлаетъ 9 прыжковъ въ то время, какъ собака дѣлаетъ всего 6 прыжковъ; 3 прыжка собаки составляютъ 7 прыжковъ лисицы. Сколько прыжковъ сдѣлаетъ собака, пока догонитъ лисицу.

Рѣшеніе. Пусть число прыжковъ собаки будетъ x. Разсуждаемъ такъ: Три прыжка собаки равны семи прыжкамъ лисицы, а потому 1 прыжокъ собаки равенъ $\frac{7}{3}$ прыжковъ лисицы, а x прыжковъ собаки равны $\frac{7x}{3}$ прыжковъ лисицы. Формула $\frac{7x}{3}$ представляетъ путь, который должна проскакать собака; этотъ путь выраженъ въ прыжкахъ лисицы.

Съ другой стороны, собака дѣлаетъ 6 прыжковъ въ то время, какъ лисица дѣлаетъ 9; отсюда слѣдуетъ, что лисица сдѣлаетъ $\frac{9x}{6}$ своихъ прыжковъ въ то время, какъ собака сдѣлаетъ x своихъ прыжковъ.

Слѣдовательно, $\frac{7x}{3}=60+\frac{9x}{6}$, откуда $x=72$.

87.

Двое часовъ бьютъ въ одно и то же время. Было всего услышано 19 ударовъ. При этомъ извѣстно, что первые часы отстаютъ отъ вторыхъ на 2 секунды; промежутокъ между послѣдовательными ударами первыхъ часовъ равенъ 3 секундамъ, а вторыхъ 4 секундамъ. Который часъ?

Рѣшеніе. Пусть x-ый ударъ первыхъ часовъ совпадаетъ съ y-ымъ ударомъ вторыхъ часовъ. Тогда до x-го удара первые часы били въ продолженіе $3(x-1)$ секундъ, а вторые часы— въ продолженіе $4(y-1)$ секундъ.

Такъ какъ первые часы отстаютъ отъ вторыхъ на 2 секунды, то, слѣдовательно,

$$4(y-1)-3(x-1)=2$$

или

$$4y-3x=3..$$

Рѣшая неопредѣленное ур-іе (1), имѣемъ:

$$x_1=3;\quad x_2=7;\quad x_3=11$$
$$y_1=3;\quad y_2=6;\quad y_3=9$$

Изъ рѣшеній ур-ія видимъ, что удары совпадаютъ слѣдующимъ образомъ: 3-й ударъ первыхъ часовъ съ 3-мъ ударомъ вторыхъ, 7-й съ 6-мъ, и 11-й съ 9-мъ. Откуда замѣчаемъ, что совпаденій было 3. Слѣдовательно, въ дѣйствительности, ударовъ было $19+3=22$, откуда видимъ, что часы показывали $22:2=11$ часовъ.

88.

Мнѣ въ 1906 году было столько лѣтъ сколько единицъ въ числѣ, составленномъ двумя послѣдними цифрами того года, въ которомъ я родился. Сколько мнѣ лѣтъ?

Рѣшеніе. Обозначимъ двѣ послѣднія цифры года моего рожденія черезъ x и y. Если мнѣ больше шести лѣтъ, то годъ

моего рожденія можно обозначить черезъ $1800+10x+y$. Согласно условію задачи, $1906-(1800+10x+y),=10x+y$, откуда $x=5$, а $y=3$, т.-е. мнѣ 53 года. Предположеніе, что я родился послѣ 1900 г., приводитъ къ отвѣту: мнѣ 3 года.

89.

Пѣшеходъ, идя вдоль линіи трамвая, черезъ каждыя 4 минуты встрѣчаетъ вагонъ трамвая, а черезъ каждыя 12 минутъ его нагоняетъ вагонъ. Зная, что пѣшеходъ и трамвай движутся равномѣрно, опредѣлить, черезъ какіе промежутки времени отходятъ вагоны со станціи.

Пусть вагонъ трамвая въ 1 минуту проходитъ разстояніе v, а пѣшеходъ v_1 и пусть a есть разстояніе между двумя послѣдовательными вагонами трамвая, тогда, такъ какъ пѣшеходъ. черезъ 4 минуты встрѣчаетъ вагонъ трамвая, то, проходя въ 1 минуту разстояніе v_1, онъ пройдетъ въ 4 минуты $4v_1$, а трамвай $4v$; сумма пройденныхъ пѣшеходомъ и трамваемъ разстояній дастъ намъ a, т.-е.

$$4v+4v_1=a \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Въ 12 минутъ пѣшеходъ пройдетъ разстояніе $12v_1$, а трамвай проѣдетъ $12v$; разность разстояній трамвая и пѣшехода дастъ намъ снова разстояніе a, т.-е.

$$12v-12v_1=a \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Изъ ур-ій (1) и (2) имѣемъ:

$$4v+4v_1=12v-12v_1, \text{ откуда } v_1=\frac{v}{2},$$

т.-е. пѣшеходъ движется вдвое медленнѣе трамвая. Далѣе, пусть со станціи вышелъ одинъ вагонъ; слѣдующій долженъ выйти черезъ такой промежутокъ времени, черезъ который предыдущій пройдетъ разстояніе a; но разстояніе a пройдетъ вагонъ въ $\frac{a}{v}$ минутъ, такъ какъ въ каждую минуту онъ проходитъ разстояніе v. Слѣдовательно, вычисливъ выраженіе $\frac{a}{v}$, мы

отвѣтимъ на вопросъ задачи, т.-е. найдемъ, черезъ какой промежутокъ времени выходятъ со станціи вагоны.

Подставивъ $v_1=\frac{v}{2}$ въ ур-іе (1), найдемъ что $\frac{v}{a}=6$ минутамъ.

90.

Найти три послѣдовательныхъ нечетныхъ числа, сумма квадратовъ которыхъ равна четырехзначному числу, изображенному одинаковыми цифрами.

Рѣшеніе. Квадраты нечетныхъ чиселъ могутъ оканчиваться только цифрами 1, 5 или 9; суммы же квадратовъ трехъ нечетныхъ чиселъ могутъ оканчиваться только цифрами 1, 3, 5 или 7, что видно изъ слѣдующихъ комбинацій: (1+1+1); (5+5+5); (9+9+9); (1+5+5); (1+9+9); (5+9+9); (9+1+1); (9+5+5); (1+5+9). Отсюда заключаемъ, что суммой квадратовъ искомыхъ чиселъ можетъ быть: 1111, 3333, 5555 или 7777... (1). Обозначимъ наименьшее изъ искомыхъ чиселъ черезъ x. Тогда имѣемъ:

$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=x^2+x^2+4x+4+x^2+8x+16=3x^2+12x+20=$
$=3(x^2+4x+4)+8=3(x+2)^2+8$, т.-е. сумма квадратовъ трехъ послѣдовательныхъ четныхъ или нечетныхъ чиселъ равна утроенному квадрату средняго числа плюсъ 8. Теперь выберемъ изъ чиселъ ряда (1) такое, которое, будучи уменьшено на 8, дѣлилось бы на 3 безъ остатка. Этому условію удовлетворяетъ только число 5555. Слѣдовательно,

$x+2=\sqrt{\frac{5555-8}{3}}=43$. Искомыя числа суть: 41, 43 и 45.

91.

Три лица A, B и C вмѣстѣ со своими женами D, E и F купили по нѣсколько вещей, при чемъ каждый заплатилъ за свои вещи столько рублей, сколько купилъ вещей. Каждый мужъ заплатилъ на 63 руб. болѣе, чѣмъ его жена. Кромѣ того извѣстно, что A купилъ на 23 вещи болѣе, чѣмъ E, а B платилъ за

каждую вещь 11-ю рублями дороже D. Кто на комъ женатъ?

Рѣшеніе. Пусть x есть число вещей, купленныхъ какимъ-либо изъ трехъ лицъ A, B или C, а y—число вещей, купленныхъ его женою. Тогда сумма, заплаченная мужемъ была x^2, а его женой y^2. По условію задачи имѣемъ:

$$x^2-y^2=63 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$(x+y)(x-y)=63 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Такъ какъ $63=63.1=21.3=9.7$, то ур-ію (2) можно удовлетворить, сдѣлавъ одно изъ слѣдующихъ трехъ предположеній:

$$\left|\begin{matrix} x+y=63 \\ x-y=1 \end{matrix}\right| \text{ или } \left|\begin{matrix} x+y=21 \\ x-y=3 \end{matrix}\right| \text{ или } \left|\begin{matrix} x+y=9 \\ x-y=7 \end{matrix}\right| \quad \ldots \quad (3)$$

Изъ этихъ трехъ ур-ій получаемъ соотвѣтственно

$$\left|\begin{matrix} x=32 \\ y=31 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=12 \\ y=9 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=8 \\ y=1 \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Такъ какъ, по условію, A купилъ 23 вещами болѣе E, то онъ не могъ купить ни 12, ни 8 вещей; слѣдовательно, онъ купилъ 32 вещи. Число вещей, купленныхъ E, меньше чѣмъ у A на 23, т.-е. равно 9. Поэтому вышеприведенную таблицу имѣемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left|\begin{matrix} x=32(A) \\ y=31 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=12 \\ y=9(E) \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=8 \\ y=1 \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Далѣе, по условію, B платилъ 11 рублями дороже, чѣмъ D за каждую вещь, слѣдовательно, онъ не могъ платить 8 рублей, а потому заплатилъ всего 12 рублей. D платила на 11 рублей меньше, слѣдовательно, она платила 1 рубль Такимъ образомъ, таблица принимаетъ видъ:

$$\left|\begin{matrix} x=32(A) \\ y=31 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=12(B) \\ y=9(E) \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} x=8 \\ y=1(D) \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Изъ таблицы (6) видимъ, что $x=8$ есть число вещей, купленныхъ C, а $y=31$—число вещей, купленныхъ F.

Слѣдовательно, A женатъ на F, B на E, а C на D.

92.

За цѣлыя сутки гири стѣнныхъ часовъ опускаются на 312 линій. Часы заводятся ежедневно въ 12 часовъ дня. Сколько времени показываютъ часы, если извѣстно, что они пробили столько разъ, на сколько линій одна гиря была выше другой? (Часы бьютъ только часы, но не бьютъ получасовъ).

Рѣшеніе. Ходовая гиря опускается за каждый часъ на $\frac{312}{24} = 13$ линій; боевая же гиря съ каждымъ ударомъ опускается на $\frac{312}{13.12} = 2$ линіямъ (за сутки всего ударовъ будетъ $2.(1+2+3+\ldots.+12) = \frac{2(1+12)12}{2} = 13.12$). Пусть часы пробили x ударовъ, т.-е. показывали x часовъ. За время отъ 12 часовъ дня до x часовъ ходовая гиря опустилась на $13x$ линій, а боевая на $2(1+2+3+\ldots.+x) = 2\frac{(1+x)x}{2} = (1+x)x$ линій. Согласно условію задачи, $13x-(1+x)x=x$, откуда $x=11$. Второй отвѣтъ не годится, такъ какъ x не можетъ быть больше 12.

93.

Корабль съ 210 пассажирами имѣлъ совершенно достаточный запасъ прѣсной воды, разсчитанный на все время плаванія. По истеченіи 3 недѣль плаванія стало умирать ежедневно по 3 человѣка. Несмотря на то, что плаваніе продолжалось 9-ю днями болѣе предположеннаго, запасъ воды истощился одновременно съ прибытіемъ корабля къ мѣсту своего назначенія. Предполагая, что ежедневная порція воды, отпускаемая каждому пассажиру, была одна и та же все время, опредѣлить, сколько дней продолжалось плаваніе.

Рѣшеніе. Пусть x число дней, предназначенныхъ для плаванія. Тогда весь запасъ воды на кораблѣ выразится черезъ $210x$ порцій. Въ теченіе 3 недѣль истрачено $210 \cdot 21$ порцій (3 недѣли=21 день). Спустя 21 день благополучнаго плаванія осталось $(x-21)$ дней, а такъ какъ плаваніе продолжалось на 9 дней больше предположеннаго, то всего дней для плаванія оставалось $(x-21+9)=(x-12)$. Въ теченіе этихъ $(x-12)$ дней умирало ежедневно по три человѣка, слѣдовательно, въ первый день болѣзни было выдано 207 порцій, во второй 204, въ третій 201 и т. д.; число всѣхъ членовъ этой ариѳметической прогрессіи равно числу оставшихся дней, т.-е. равно $(x-12)$. Поэтому число порцій, израсходованныхъ въ теченіе $(x-12)$ дней болѣзни вычислится по формулѣ: $s=\frac{(a+l)}{2}\cdot n$, гдѣ $a=207$, $n=x-12$ и $l=a-(n-1)\,d=207-3(x-12-1)=207-3(x-13)$.

Итакъ, имѣемъ:

$$s=\frac{[207+207-3(x-13)]}{2}\cdot(x-12)=\frac{(453-3x)(x-12)}{2}.$$

Если къ вычисленной суммѣ прибавимъ количество израсходованныхъ порцій до болѣзни, т.-е. $210 \cdot 21$, то сумма дастъ намъ количество всѣхъ порцій, т.-е. $210x$. Слѣдовательно,

$$210x=210 \cdot 21+\frac{(453-3x)(x-12)}{2},$$ или $x^2-23x-1128=0$, откуда

$$x_1=47 \text{ и } x_2=-24.$$

Плаванье продолжалось $47+9=56$ дней.

94.

Двое, имѣя по одинаковому количеству золотыхъ жетоновъ, продали ихъ, при чемъ за каждый получили столько двугривенныхъ, сколько всего было продано жетоновъ. На полученную сумму они купили нѣсколько подстаканниковъ (менѣе 10), заплативъ за каждый по 2 рубля, послѣ чего у нихъ осталось еще нѣкоторое количество денегъ, меньшее

цѣны подстаканника. При дѣлежѣ одинъ изъ нихъ получилъ однимъ подстаканникомъ больше другого, въ силу чего онъ, отдавъ другому оставшіяся отъ покупки деньги, доплатилъ еще нѣкоторую сумму. Сколько денегъ было доплачено?

Рѣшеніе. Обозначаемъ количество жетоновъ черезъ x, тогда сумма, за которую былъ проданъ одинъ жетонъ, выразится черезъ $20x$ копѣекъ. Положимъ, что число купленныхъ подстаканниковъ было y, тогда за эти подстаканники всего было заплачено $200y$ копѣекъ. Послѣ этой покупки у нихъ осталась нѣкоторая сумма, которая должна быть меньше цѣны подстаканника и, кромѣ того, должна быть кратной 20, такъ какъ они получали двугривенные, и покупая подстаканники, платили за каждый 10 двугривенныхъ; слѣдовательно, у нихъ должно остаться еще нѣсколько двугривенныхъ. Это оставшееся количество двугривенныхъ обозначимъ черезъ z; тогда вся оставшаеся сумма будетъ $20z$. Такъ какъ количество жетоновъ было x, а каждый стоилъ $20x$, то за всѣ жетоны было получено $20x^2$. По условію задачи, $20x^2=200y+20z$ или $x^2=10y+z$. Оставшаяся сумма $20z<200$ (цѣны подстаканника) или $z<10$. Имѣя въ виду $y<10$, заключаемъ, что x^2 есть число двузначное и можетъ равно быть одному изъ слѣдующихъ квадратовъ: 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Но такъ какъ число жетоновъ было четное (двое сложились поровну), то x^2 должно быть четнымъ, слѣдовательно, можетъ быть только: 16, 36, 64. Но (y) число подстаканниковъ должно быть нечетнымъ, такъ какъ у одного изъ нихъ при дѣлежѣ было однимъ подстаканникомъ больше, слѣдовательно, цифра десятковъ искомаго числа x^2 должна быть нечетной, а потому возможны два числа 16 и 36. Въ обоихъ случаяхъ, имѣемъ: $z=6$. Слѣдовательно, оставшаяся сумма была равна: $20.6=120$ коп.; за лишній подстаканникъ одинъ долженъ былъ дать другому одинъ рубль, но такъ какъ онъ уступилъ слѣдующему половину оставшихся наличныхъ денегъ, именно 60 коп., то всего долженъ ему доплатить еще 40 коп.

95.

Найти шесть послѣдовательныхъ положительныхъ четныхъ чиселъ, сумма квадратовъ которыхъ равна четырехзначному числу, изображенному одинаковыми цифрами.

Рѣшеніе. Квадраты четныхъ чиселъ могутъ оканчиваться только цифрами: 4, 6 и 0. Этими же цифрами должны оканчиваться числа, представляющія собою суммы квадратовъ шести послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ. Если принять во вниманіе условіе задачи, то слѣдуетъ предположить въ данномъ случаѣ, что сумма квадратовъ искомыхъ шести четныхъ чиселъ можетъ быть равна или 4444 или же 6666. Обозначимъ черезъ x наименьшее изъ искомыхъ четныхъ чиселъ, тогда сумма квадратовъ всѣхъ шести чиселъ выразится въ видѣ
$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+8)^2+(x+10)^2=6x^2+60x+220$.
По условію задачи

$$6x^2+60x+220=4444 \text{ или } 6666.$$

Въ первомъ случаѣ имѣемъ: $x_1=22$, $x_2=-32$, а во второмъ цѣлыхъ рѣшеній не получится, а, слѣдовательно, единственное четырехзначное число, удовлетворяющее задачѣ, есть 4444, а сами числа: 22, 24, 26, 28, 30 и 32.

96.

Число 294 (или75) разложить на четыре части и притомъ такихъ, что если первое число увеличить, второе уменьшить, третье умножить, а четвертое раздѣлить на одно и то же число, то результаты отъ каждаго изъ четырехъ дѣйствій получатся одинаковые.

Рѣшеніе. Пусть x, y, z и t искомыя числа. Обозначимъ черезъ a число, служащее для выполненія дѣйствій, а черезъ b число, выражающее результатъ указанныхъ дѣйствій. Тогда имѣемъ: $x+a=b$; $y-a=b$; $za=b$; $t:a=b$; $x+y+z+t=294$ или $x=b-a$; $y=b+a$; $z=\frac{b}{a}$; $t=ab$. Сложимъ эти четыре урав-

ненія по частямъ: $x+y+z+t=b-a+b+a+\frac{b}{a}+ab=2b+ab+$ $+\frac{b}{a}=294$. Но $b=az$, слѣдовательно, $2az+a^2z+z=294$ или $z(a^2+2a+1)=z(a+1)^2=294=6.7^2$. Очевидно, что $z=6$ и $a+1=7$. Зная z и a, находимъ $x=30$; $y=42$ и $t=216$.

Алгебраическіе софизмы.

97.

Всѣ числа равны между собою.

Если m не равно n, то все-таки $m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2$ или $(m-n)^2=(n-m)^2$. Отсюда $m-n=n-m$ или $2n=2m$ или, дѣля на два окончательно $n=m$.

Разъясненіе. Корень квадратный имѣетъ два значенія: вмѣсто равенства $m-n=n-m$ надо было написать равенство $(m-n)=$ $=-(n-m)$ или $-(m-n)=n-m$. Такъ, напр., $(+2)^2=(-2)^2$, но $+2$ не равно -2.

98.

Сумма какихъ угодно двухъ одинаковыхъ количествъ равна нулю.

Докажемъ, что $a+a=0$. Пусть $x=a$. Умноживъ обѣ части на $-4a$, получимъ $-4ax=-4a^2$ или $-4ax+4a^2=0$. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по x^2, тогда $a^2-4ax+4a^2=x^2$ или $(x-2a)^2=x^2$, откуда $x-2a=x$. Но такъ какъ $x=a$, то $a-2a=a$ или $-a=a$. Окончательно, $a+a=0$.

Разъясненіе. При извлеченіи квадратнаго корня изъ обѣихъ частей равенства $(x-2a)^2=x^2$ необходимо считать $\pm(x-2a)=\mp x$.

99.

Всякое количество равно своей половинѣ.

Положимъ, что $a=b$. Умножимъ обѣ части равенства на a и вычтемъ затѣмъ изъ обѣихъ частей по b^2. Получимъ $a^2-b^2=$ $=ab-b^2$ или $(a+b)(a-b)=b(a-b)$. Дѣля обѣ части на $(a-b)$,

имѣемъ $a+b=b$. Такъ какъ $a=b$, то равенство $a+b=b$ принимаетъ видъ $a+a=a$ или $2a=a$, откуда $a=\frac{a}{2}$.

Разъясненіе. Множитель $(a—b)$ есть нуль, такъ какъ $a=b$. Мы пришли къ абсурдному результату только потому, что позволили себѣ раздѣлить обѣ части равенства $(a+b)(a—b)=b(a—b)$ на $a—b$ т.-е. на нуль.

100.

Два неравныхъ количества равны другъ другу.

Пусть $a>b$. Напишемъ тождество $—ab=—ab$ или $(—a).b=a(—b)$...(1). Но $—a=b—a—b=b—(a+b)$; $b=a—b—a=a—(a+b)$ Теперь тождество (1) можно написать въ слѣдующемъ видѣ: $[b—(a+b)]b=[a—(a+b)]a$ или, раскрывъ скобки, $b^2—b(a+b)=a^2—a(a+b)$, или $b^2—\frac{2b(a+b)}{2}=a^2—\frac{2a(a+b)}{2}$. Къ обѣимъ частямъ послѣдняго равенства прибавляемъ по $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; получаемъ: $b^2—\frac{2b(a+b)}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=a^2—\frac{2a(a+b)}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ или $\left(b—\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(a—\frac{a+b}{2}\right)^2$, откуда $b—\frac{a+b}{2}=a—\frac{a+b}{2}$.

Прибавляя къ обѣимъ частямъ полученнаго равенства по $\frac{a+b}{2}$, имѣемъ окончательно $b=a$.

Разъясненіе. Къ абсурдному результату мы пришли только потому, что, извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей равенства $\left(b—\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(a—\frac{a+b^2}{2}\right)^2$, написали $b—\frac{a+b}{2}=a—\frac{a+b}{2}$ вмѣсто $\pm\left(b—\frac{a+b}{2}\right)=\mp\left(a—\frac{a+b}{2}\right)$.

101.

Изъ двухъ величинъ та, которая больше другой, будетъ меньше ея.

Напишемъ слѣдующія равенства: $\frac{+a}{—a}=—1$ и $\frac{—a}{+a}=—1$; но

двѣ величины порознь равныя третьей равны между собой, слѣдовательно, $\frac{+a}{-a}=\frac{-a}{+a}$ (1). Такъ какъ произведеніе крайнихъ членовъ равенства (1) равно произведенію среднихъ, то равенство (1) представляетъ собою пропорцію. Во всякой пропорціи, если предыдущій членъ перваго отношенія больше своего послѣдующаго, то и предыдущій членъ второго отношенія больше своего послѣдующаго, т.-е. если $+a>-a$, то и $-a>+a$. Слѣдовательно, меньшая величина $(-a)$ больше большей величины $(+a)$.

Разъясненіе. Равенство (1) не есть пропорція, такъ какъ пропорціей называется равенство двухъ ариѳметическихъ отношеній, въ которыхъ предыдущіе члены или оба больше, или оба меньше послѣдующихъ.

102.

Всякое положительное число равно отрицательному, если только абсолютныя величины ихъ равны.

Изъ алгебры извѣстно, что $(\sqrt{-a})^2=-a$; съ другой стороны $(\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})\cdot(\sqrt{-a})=\sqrt{(-a)(-a)}=\sqrt{+a^2}=+a$. Отсюда слѣдуетъ, что $-a=+a$.

Разъясненіе. Равенство $(\sqrt{-a})(\sqrt{-a})=\sqrt{(-a)(-a)}$ невѣрно, такъ какъ данное въ алгебрѣ правило, что произведеніе двухъ одинаковыхъ корней равно корню изъ произведенія подкоренныхъ количествъ, выведено только въ томъ предположеніи, что подкоренныя количества положительны.

103.

Чѣмъ больше знаменатель дроби, тѣмъ больше и сама дробь.

Пишемъ тождество: $lg\left(\frac{1}{2}\right)=lg\left(\frac{1}{2}\right)$. Умноживъ лѣвую часть на 2, получимъ неравенство $2lg\left(\frac{1}{2}\right)>lg\left(\frac{1}{2}\right)$ или $lg\left(\frac{1}{2}\right)^2>lg\left(\frac{1}{2}\right)$.

Такъ какъ большему логариѳму соотвѣтствуетъ и большее число, то $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

Разъясненіе. Логариѳмъ правильной дроби есть величина отрицательная; слѣдовательно, помноживъ лѣвую часть тождества $lg\left(\frac{1}{2}\right) = lg\left(\frac{1}{2}\right)$ на 2, мы ее уменьшили въ 2 раза, а потому $2lg\left(\frac{1}{2}\right) < lg\frac{1}{2}$.

104.

Два больше четырехъ.

Очевидно, что $\frac{1}{4} > \frac{1}{16}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Логариѳмируя, имѣемъ: $2lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4lg\left(\frac{1}{2}\right)$. Отсюда, дѣля обѣ части неравенства на $lg\frac{1}{2}$, получаемъ: $2 > 4$.

Разъясненіе. Къ такому результату мы пришли только потому, что дѣлили обѣ части неравенства на $lg\left(\frac{1}{2}\right)$, т.-е. на величину отрицательную, и при этомъ не измѣнили знака неравенства на обратный.

195.

Всякое число въ любой степени есть единица.

Извѣстно, что $a^n = \sqrt[m]{a^{mn}}$ (1). Съ другой стороны,

$$\sqrt[m]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{m}} = a^{n \cdot \frac{m}{m}} = a^{n\left(\overbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots}^{m\text{ разъ}}\right)} \quad (2).$$

Дадимъ m значеніе безконечности, тогда $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^{n\left(\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}+\ldots\right)} =$

$= a^{n(0+0+0+\ldots)} = a^{n.0} = a^0 = 1$. Отсюда слѣдуетъ, что $a^n = 1$.

Разъясненіе. Равенства (1) и (2) могутъ быть написаны и имѣютъ смыслъ только тогда, когда завѣдомо извѣстно, что m получаетъ *конечное* значеніе.

106.

Сумма безконечнаго числа нулей есть единица.

Пишемъ тождество $\frac{m}{m}=1$ ... (1). Но

$\frac{m}{m}=\frac{1}{m}\,.\,m=\overbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots}^{m\text{ разъ}}=1$ ... (2). Пусть $m=\infty$.

Тогда $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}=0+0+0\ldots$ (3). Сравнивая (2) и (3), находимъ $0+0+0+\ldots=1$.

Разъясненіе. См. софизмъ 105.

107.

Всякое положительное число есть величина отрицательная и притомъ безконечно большая по абсолютной величинѣ.

Дѣля единицу на $(1-a)$, получаемъ частное, состоящее изъ безконечнаго числа членовъ:

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Пусть, напримѣръ, $a=2$; тогда имѣемъ: $-1=1+2+2^2+2^3+\ldots$ или $1=-(1+2+2^2+2^3+\ldots)=-\infty$. При $a=\frac{3}{2}$ получимъ $2=-\infty$; и вообще, давая a значенія 3, 4, 5... и $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\ldots$, можно доказать, что любое положительное число есть $-\infty$.

Разъясненіе. Если a меньше единицы, то равенство (1) представляетъ собой формулу безконечно-убывающей геометрической прогрессіи. Эта формула указываетъ, что рядъ $1+a+a^2+\ldots$ при $a<1$ стремится къ опредѣленному конечному предѣлу. Если же $a>1$, то рядъ $1+a+a^2+\ldots$, при безграничномъ увеличеніи числа членовъ, безгранично возрастаетъ и во всякомъ случаѣ не представляетъ собой частнаго, полученнаго отъ дѣленія 1 на $(1-a)$.

Равенство (1) показываетъ только, что процессъ дѣленія можетъ быть продолженъ до безконечности. Мы можемъ остано-

виться на любомъ членѣ ряда и прибавить къ нему остаточный членъ, тогда формальное равенство (1) обратится въ тождество:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + \frac{a^2}{1-a} = 1 + a + a^2 + \frac{a^3}{1-a} = \text{и т. д.}$$

108.

Единица равна двумъ.

Напишемъ формулу разложенія бинома Ньютона:

$$(a-b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n \ldots (1).$$

Полагая $n=1$, имѣемъ:

$(a+b)^1 = a+b+0+0+\ldots+0+a+b$ или $a+b=2a+2b=2(a+b)$.

Отсюда, дѣля обѣ части послѣдняго равенства на $(a+b)$, получаемъ $1=2$.

Разъясненіе. Извѣстно, что разложеніе бинома имѣетъ $n+1$ членовъ, гдѣ n показатель степени бинома. Тотъ видъ, какой данъ строкѣ бинома въ данномъ софизмѣ въ равенствѣ (1) придается ему условно. Зная показатель n, надо разлагать биномъ по данной формулѣ слѣдующимъ образомъ:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1-2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

при подстановкѣ даннаго n въ эту строку самъ собой получится членъ, равный нулю, это будетъ $(n+2)$-ой членъ. Подставлять же данныя значенія въ строку (1), гдѣ конецъ разложенія имѣетъ чисто условный видъ, будетъ ошибочно.

109.

Всѣ конечныя числа суть нули; сумма безконечнаго ряда конечныхъ величинъ есть нуль; нуль равенъ безконечности.

Назовемъ сумму безконечнаго числа равныхъ слагаемыхъ черезъ x, тогда $x=a+a+a+a+\ldots$ (1). Очевидно, что сумма всѣхъ членовъ ряда безъ перваго также равна x, а потому $x=a+x$ или $x-x=a$, т.-е. $0=a$.

Вставляя въ равенство (1) вмѣсто a полученное значеніе 0, получаемъ: $x=0+0+0+0\ldots=0\ldots$ (2). Изъ выраженія (1)

видно, что x должно быть равно безконечности; сравнивъ этотъ результатъ съ выраженіемъ (2), заключаемъ, что $0=\infty$.

Разъясненіе. Къ такимъ результатамъ мы приходимъ только потому, что оперируемъ съ безконечностью, какъ съ величиной конечной; изъ равенства $x-x=a$ можно вывести только то, что $a=\infty-\infty$, но $\infty-\infty$ есть неопредѣленность, а не разность между двумя одинаковыми количествами.

110.

Половина равна нулю; нуль равенъ единицѣ.

Согласно формулѣ бинома,

$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+$

$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4+\ldots$. Пусть $a=b=1$ и $n=-1$; тогда $(1+1)^{-1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots$ Если число членовъ второй части равенства четное, то $\frac{1}{2}=0$; если же число членовъ нечетное, то $\frac{1}{2}=1$. Слѣдовательно $\frac{1}{2}=0=1$.

Разъясненіе. Формула возвышенія бинома въ степень можетъ быть распространена на какой угодно показатель только въ томъ случаѣ, когда $1>\frac{b}{a}>1$ —.

111.

Сумма цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ больше ихъ произведенія.

Возьмемъ конечный рядъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ:

$$a+b+c+\ldots+l.$$

Очевидно, что $lg\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}=lg\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}$. Отсюда

$$2lg\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}>lg\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}$$ или

$lg\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}\right)^2 > lg\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}$. Бо́льшимъ логариѳмамъ соотвѣтствуютъ и бо́льшія числа; слѣдовательно, $\left(\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}\right)^2 > \frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}$ или $\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l} > 1$. Освободивъ неравенство отъ дробей, получимъ окончательно

$$a+b+c+\ldots+l > a.b.c\ldots l.$$

Разъясненіе. Выраженіе $log\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}$ есть величина отрицательная, такъ какъ числитель меньше знаменателя; при умноженіи отрицательной величины на 2 мы эту величину уменьшаемъ въ два раза, а потому

$$2\ log\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l} < log\frac{a+b+c+\ldots+l}{a.b.c\ldots l}.$$

112.

Всякое количество равно нулю.

Уравненіе $3x^2-3ax+a^2=0$, гдѣ a есть извѣстное количество, отличное отъ нуля, можно представить такъ: $3x^2-3ax=-a^2$. Умноживъ обѣ части уравненія на $(-a)$ и прибавивъ затѣмъ къ обѣимъ же частямъ по x^3-a^3, получимъ:

$$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3=a^3+x^3-a^3 \text{ или } (x-a)^3=x^3.$$

Извлекаемъ изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія кубичный корень и получаемъ $x-a=x$, откуда $a=0$.

Разъясненіе. Уравненіе $(x-a)^3=x^3$ на самомъ дѣлѣ представляетъ собой уравненіе 2-ой степени, такъ какъ обѣ части могутъ быть сокращены на x^3. Извлекая корень кубичный, мы теряемъ оба корня уравненія и въ результатѣ получаемъ *уравненіе* $a=0$, не имѣющее ни одного корня.

Геометрія.

113.

Найти прямоугольный треугольникъ, стороны котораго выражаются цѣлыми раціональными числами, а площадь выражается тѣмъ же числомъ, что и периметръ.

Рѣшеніе. Согласно условію, $x+4+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{xy}{2}$ (гдѣ x и y искомые катеты) или $2\sqrt{x^2+y^2}=xy-2x-2y$. Возводя въ квадратъ и сокращая, получаемъ послѣдовательно: $x^2y^2-4x^2y-4xy^2+8xy=0$; $xy-4x-4y+8=0$; $xy-2x-4y+8-2x=x(y-2)-4(y-2)-2x=0$. Пусть $y-2=t$, откуда $y=t+2$. Тогда ур-ніе принимаетъ видъ: $xt-4t-2x=0$; $x(t-2)-4t=0$; $x=\frac{4t}{t-2}$. Такъ какъ $y>0$ и $x>0$, то $t+2>0$ и $\frac{4t}{t-2}>0$; слѣдовательно $t>-2$ и $t>0$. Искомый треугольникъ не можетъ быть равнобедреннымъ, такъ какъ гипотенуза выражалась бы ирраціональнымъ числомъ.

Поэтому, предположивъ $x>y$, получаемъ $\frac{4t}{t-2}>t+2$; $4t>t^2-4$; $t^2-4t-4<0$ или $[t-(2+2\sqrt{2})][t-(2-2\sqrt{2})]<0$, откуда $t<2+2\sqrt{2}$ или $t<5$ (оба множителя послѣдняго неравенства должны имѣть разные знаки; слѣдовательно, если первый множитель положителенъ, то второй долженъ быть отрицательнымъ, т.-е. $t>2+2\sqrt{2}$ и $t<2-2\sqrt{2}$, что невозможно, такъ какъ предѣлы, для t противорѣчатъ другъ другу). Съ другой стороны изъ равенства $x=\frac{4t}{t-2}$ заклю-

чаемъ, что x будетъ положительнымъ при $t \geqq 3$. Слѣдовательно $5 > t \geqq 3$, т.-е. можетъ принимать только значенія 3 и 4.

Если $t=3$, то $x=12$; $y=5$ и $\sqrt{x^2+y^2}=13$.

Если $t=4$, то $x=8$; $y=6$ и $\sqrt{x^2+y^2}=10$.

114.

Въ прямоугольный треугольникъ вписана окружность, которая дѣлитъ гипотенузу на части 2 и 3. Опредѣлить площадь треугольника.

Рѣшеніе. Пусть ABC данный треугольникъ и пусть $BD=3$ и $AD=2$. Изъ разсмотрѣнія элементовъ даннаго треугольника видимъ, что $BF=BD=3$ и $AE=AD=2$. Пусть $FC=CE=x$, тогда

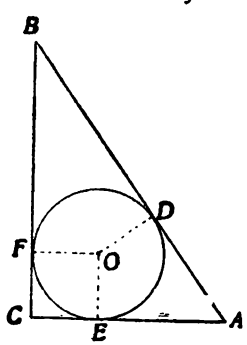
$$AB^2=BC^2+AC^2.$$

или $5^2=(3+x)^2+(2+x)^2$

откуда имѣемъ ур-іе:

$$x^2+5x-6=0$$

изъ котораго $x=1$; другой корень отрицатель ный. Слѣдовательно, площадь равна $\frac{BC \cdot AC}{2}=\frac{4 \cdot 3}{2}=6$.



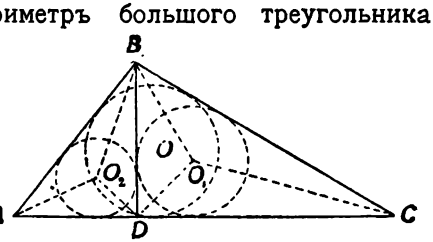
Черт. 1.

115.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу изъ вершины прямого угла. Этотъ перпендикуляръ дѣлитъ большой прямоугольный треугольникъ на два малыхъ; въ эти малые треугольники вписаны окружности, радіусы которыхъ соотвѣтственно равны 4 и 3. Опредѣлить радіусъ окружности, вписанной въ большой треугольникъ.

Рѣшеніе. Обозначимъ периметръ большого треугольника черезъ $2p$, а периметры малыхъ треугольниковъ соотвѣтственно черезъ $2p_1$ и $2p_2$.

Соединивъ центры вписанныхъ окружностей со сторонами соотвѣтствующихъ тре-



Черт. 2.

угольниковъ, будемъ имѣть изъ треугольника BCD:

$$\text{площ. } \triangle BCD = \triangle BO_1C + \triangle DO_1C + \triangle BO_1D =$$
$$= \frac{BC \cdot r_1}{2} + \frac{DC \cdot r_1}{2} + \frac{BD \cdot r_1}{2} = \frac{r_1}{2}(2p_1) = p_1 r_1.$$

Но $r_1 = 4$; слѣдовательно, площадь треугольника BCD равна $4p_1$.

Такимъ же образомъ площ. $\triangle ABD = 3p_2$. Площадь же большого треугольника ABC будетъ pr. Но мы знаемъ, что

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle BDC$$

слѣдовательно, $pr = 4p_1 + 3p_2 \ldots (1)$

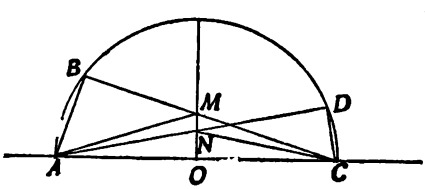
Но, такъ какъ треугольники ABC, BCD и ABD подобны, то

$$\frac{p}{r} = \frac{p_1}{4} = \frac{p_2}{3} = q, \text{ откуда}$$

$p = rq$; $p_1 = 4q$; $p_2 = 3q$. Подставляя эти значенія въ уравненіе (1), получаемъ: $qr^2 = 16q + 9q$ или $r^2 = 16 + 9$. Слѣдовательно, $r = 5$.

116.

Въ полуокружности построены два $\triangle\triangle$-ка ABC и ADC; въ первомъ изъ нихъ сторона AB вдвое меньше стороны BC, а во второмъ сторона DC втрое меньше стороны AD. Изъ центра O возставленъ перпендикуляръ къ діаметру AC, пересѣкающій BC и AD въ точкахъ M и N. Точка M соединена прямой съ A, а точка N съ C. Доказать, что треугольники ABM и CDN подобны.



Черт. 3.

Рѣшеніе. Треугольники ABM и CDN (см. чертежъ) прямоугольные, такъ какъ углы B и D опираются на діаметръ. Изъ треугольника ABM имѣемъ:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 \ldots (1)$; $AB = \frac{BC}{2} = \frac{BM + MC}{2} = \frac{BM + AM}{2}$, откуда

$AM = 2AB - BM$ или $AM^2 = 4AB^2 - 4AB.BM + BM^2 \ldots (2)$. Сравнивъ (1) и (2), получимъ: $3AB = 4BM$. Подобнымъ же образомъ изъ треугольника NDC имѣемъ:

$NC^2 = ND^2 + DC^2 \ldots (3)$; $DC = \frac{AD}{3} = \frac{DN + AN}{3} = \frac{DN + NC}{3}$, откуда

$NC=3DC-DN$ или $NC^2=9DC^2-6DC\,.\,DN+DN^2$ ... (4).

Сравнивъ (3) и (4), получимъ

$$3DN=4DC.$$

Дѣля равенство $3AB=4BM$ на равенство $3DN=4DC$, получаемъ:

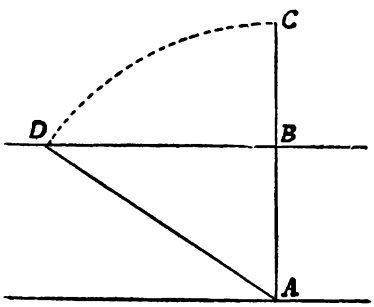
$$AB:DN=BM:DC,$$

т.-е. катеты одного треугольника пропорціональны катетамъ другого треугольника, а поэтому треугольники подобны.

117.

Верхняя часть тростника, растущаго въ рѣкѣ, выступаетъ надъ поверхностью воды. Опредѣлить глубину рѣки, производя измѣренія только на поверхности или надъ поверхностью рѣки.

Рѣшеніе. Пусть надъ поверхностью рѣки выступаетъ часть тростника $BC=a$ и пусть искомая глубина рѣки, равная AB, будетъ x. Взявъ за конецъ C тростника, отведемъ его въ положеніе AD такъ, чтобы верхняя его точка C очутилась въ D. Длину BD мы можемъ измѣрить; пусть она равна b; длина же $AD=AC=AB+BC=x+a$. Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ:



Черт. 4.

$$AD^2=BD^2+AB^2 \text{ или } (x+a)^2=b^2+x^2, \text{ откуда } x=\frac{b^2-a^2}{2a}.$$

118.

Вообразимъ себѣ земной шаръ обтянутымъ по экватору веревкой; удлинимъ эту веревку на какую-нибудь линейную единицу и, сдѣлавъ изъ этой веревки твердое кольцо, расположимъ его концентрически съ экваторомъ; тогда между экваторомъ и кольцомъ будетъ нѣкоторое опредѣленное разстоя-

ніе. Сдѣлаемъ то же съ шаромъ, величиной съ апельсинъ, т.-е. обтянемъ его веревкой по окружности большого круга и, затѣмъ, удлинивъ на ту же единицу, сдѣлаемъ твердое кольцо, расположивъ его концентрически. Въ которомъ изъ этихъ случаевъ веревка будетъ дальше отстоять отъ поверхности шара.

Рѣшеніе. Пусть R есть радіусъ земного шара. Длина окружности (экватора) будетъ $2\pi R$. Тогда длина веревки послѣ ея удлиненія будетъ: $2\pi R+1=2\pi\left(R+\frac{1}{2\pi}\right)$. Очевидно, что радіусъ кольца изъ веревки будетъ: $R+\frac{1}{2\pi}$, а такъ какъ радіусъ земного шара R, то разстояніе отъ поверхности шара до кольца будетъ $\frac{1}{2\pi}$. Такимъ же образомъ пусть r есть радіусъ малаго шара, величиной съ апельсинъ. Тогда длина его большой окружности будетъ $2\pi r$. Длина же кольца послѣ удлиненія будетъ: $2\pi r+1=2\pi\left(r+\frac{1}{2\pi}\right)$. Такъ какъ $r+\frac{1}{2\pi}$ будетъ радіусъ кольца, то разстояніе отъ поверхности малаго шара до кольца будетъ также $\frac{1}{2\pi}$. Слѣдовательно, разстояніе отъ поверхности шара до веревки въ обоихъ случаяхъ одинаково.

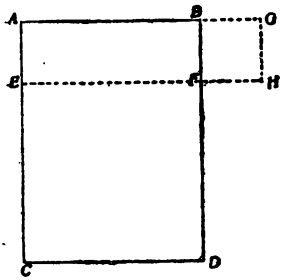
119.

Отецъ завѣщалъ своимъ сыновьямъ положить на его могилѣ мраморную прямоугольную доску. Въ своемъ завѣщаніи онъ обозначилъ лишь длину плиты, полагая, что ширина ея выяснится сама собой изъ слѣдующихъ его указаній: лицевая сторона плиты должна была быть раздѣлена на 2 части, изъ которыхъ одна площадью въ 25 кв. четвертей предназначалась для надписанія различныхъ изреченій, а другая часть, въ формѣ квадрата—для обозначенія свѣдѣній о личности покойнаго, времени его рожденія и смерти.

Послѣ смерти отца сыновья, обсудивъ вопросъ о постановкѣ плиты, пришли къ заключенію, что изготовленіе ея обойдется имъ слишкомъ дорого. И вотъ тогда одному изъ нихъ пришла мысль, что можно замѣнить столь дорого стоящую плиту другой, вчетверо меньшею по размѣрамъ и по цѣнѣ, не нарушая при этомъ указанныхъ въ завѣщаніи условій и цифровыхъ данныхъ, вслѣдствіе чего и рѣшено было заказать плиту предложенныхъ размѣровъ.

Какого размѣра плита была предложена завѣщателемъ и какого размѣра устроили ее наслѣдники (въ обоихъ случаяхъ указать ея длину и ширину).

Рѣшеніе. Обозначимъ длину плиты, указанную въ завѣщаніи, черезъ y, а ширину ея черезъ x ($AC=x$, $AB=y$). Тогда, согласно условію, $xy=25+x^2$, отсюда $x_1=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2-100})$ и $x^2=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2-100})$, т.-е. данной длинѣ плиты соотвѣтствуютъ два различныхъ значенія ея ширины. Но, по условію задачи, замѣна одного значенія ширины другимъ (при одинаковой длинѣ) даетъ возможность уменьшить площадь плиты въ четыре раза. Слѣдовательно, $x_1=4x_2$ или $\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2-100})=2(y-\sqrt{y^2-100})$, откуда находимъ, что длина плиты, обозначенная въ завѣщаніи, $y=12^1/_2$ четвертей. Подставивъ значеніе y, найдемъ $x_1=10$ четв. и $x_2=2^1/_2$ четв.



Черт. 5.

120.

Въ какомъ треугольникѣ средины высотъ лежатъ на одной прямой линіи?

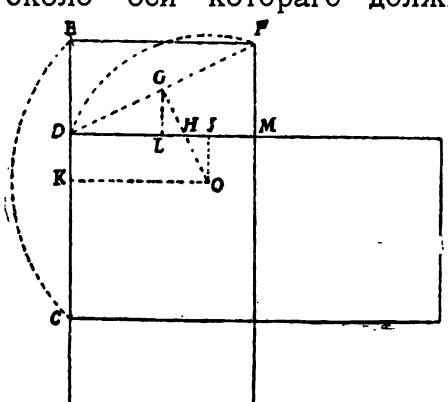
Рѣшеніе. Обозначимъ средины сторонъ треугольника ABC буквами a, b и c. Тогда ab, bc и ac параллельны соотвѣт-

ственно сторонамъ AB, BC и AC, равны $\frac{AB}{2}$, $\frac{BC}{2}$ и $\frac{AC}{2}$ и дѣлятъ высоты AD, BE и CF треугольника ABC пополамъ. Итакъ, средины высотъ треугольника ABC должны лежать на сторонахъ, или на продолженіяхъ сторонъ треугольника abc. Назовемъ средины высотъ буквами k, l и m.

Если треугольникъ ABC остроугольный, то ни одна изъ точекъ k, l и m не лежитъ ни въ одной изъ его вершинъ; отсюда заключаемъ, что въ остроугольномъ треугольникѣ средины высотъ не могутъ лежать на одной прямой. Если одинъ изъ угловъ треугольника ABC, напримѣръ уголъ A, тупой, то точка k лежитъ на сторонѣ bc, а точки l и m лежатъ соотвѣтственно на продолженіяхъ сторонъ ac и ab; такимъ образомъ и въ тупоугольномъ треугольникѣ средины высотъ не могутъ лежать на одной прямой. Если же уголъ A прямой, т.-е. треугольникъ ABC прямоугольный, то точки l и m совпадаютъ соотвѣтственно съ точками b и c, такъ что середины высотъ k, l и m лежатъ на прямой bc. Слѣдовательно, только въ прямоугольномъ треугольникѣ средины высотъ лежатъ на одной прямой.

121.

Доска ломбернаго стола, будучи раскрыта, имѣетъ форму квадрата. Опредѣлить на доскѣ мѣсто для винта, около оси котораго должна вращаться крышка, чтобы, будучи сложена или раскрыта, она принимала положеніе, симметричное относительно ножекъ стола.



Черт. 6.

Рѣшеніе. Двойная доска $ABCD$ ломбернаго стола совпадаетъ съ рамой для ножекъ. Вращая доску около центра O по направленію часовой стрѣлки, мы приведемъ ее въ положеніе

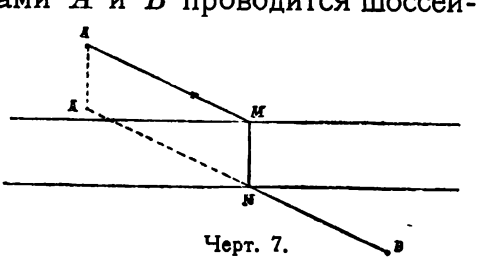
$CEFM$. Будучи раскрыта, доска $CEFM$ представитъ квадратъ, расположенный симметрично относительно ножекъ стола. При вращеніи доски $ANCD$, точки C и D опишутъ окружности радіусовъ OC и OD, при чемъ точка C попадетъ въ E, а точка D въ F. Центръ O, очевидно, долженъ лежать въ пересѣченіи перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ хордъ CE и DF.

Пусть $DC=EF=a$, тогда $AD=2a$ (длина прямоугольника должна быть вдвое больше его ширины, такъ какъ въ противномъ случаѣ доска, будучи раскрыта, не будетъ представлять собой квадрата) и $DE=\frac{a}{2}$. Такъ какъ $CE=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$ и $EK=\frac{CE}{2}=\frac{3a}{4}$, то $DK=EK-ED=\frac{3a}{4}-\frac{a}{2}=\frac{a}{4}$.

Изъ подобія треугольниковъ DGL и DFM слѣдуетъ, что $\frac{a}{2}:a=GL:\frac{a}{2}$, откуда $GL=\frac{a}{4}$; но GL есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла, а потому $DL:GL=GL:LH$ или $\frac{a}{2}:\frac{a}{4}=\frac{a}{4}:LH$, откуда $LH=\frac{a}{8}$. Изъ равенства треугольниковъ GLH и HJO слѣдуетъ, что $HJ=HL=\frac{a}{8}$. Слѣдовательно, $DJ=DL+LH=HJ=\frac{a}{2}+\frac{a}{8}+\frac{a}{8}=\frac{3a}{4}$. Такимъ образомъ перпендикуляры, опущенные изъ центра вращенія O на стороны прямоугольной доски, дѣлятъ ширину ея въ отношеніи 3 : 1, а длину въ отношеніи 5 : 3.

122.

Между двумя городами A и B проводится шоссейная дорога, которая должна пересѣчь рѣку, имѣющую одинаковую ширину и прямолинейное направленіе. Опредѣлить мѣсто для постройки моста съ



Черт. 7.

наименьшимъ пролетомъ такъ, чтобы путь между городами былъ кратчайшимъ.

Рѣшеніе. Не трудно сообразить (см. черт. 7), что $AMNB$, гдѣ MN—длина мѣста, есть искомый кратчайшій путь.

123.

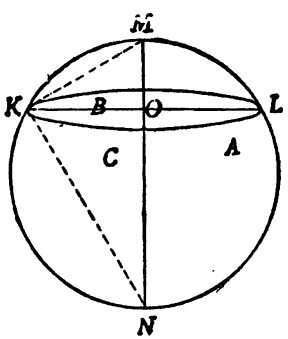
Изъ шести спичекъ составить четыре равносторонних треугольника.

Рѣшеніе. Три боковыхъ грани и основаніе тетраедра, составленнаго изъ шести спичекъ, представляютъ собой единственное рѣшеніе предложенной задачи

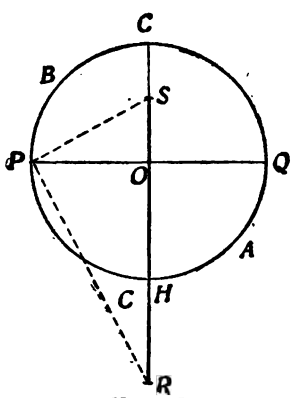
124.

Данъ матеріальный шаръ. Опредѣлить его діаметръ, пользуясь только линейкой и циркулемъ.

Рѣшеніе. Поставивъ ножку циркуля въ любую точку M шара, произвольнымъ радіусомъ описываемъ на поверхности



Черт. 8.



Черт. 9.

его окружность, на которой беремъ произвольно три точки A, B и C. Разстоянія между ними измѣряемъ циркулемъ и, откладывая ихъ на бумагѣ, описываемъ окружность, проходящую черезъ эти три точки. Проводимъ діаметръ $PQ=KL$ и перпендикулярный ему GH. Точка P лежитъ на поверхности шара и соотвѣтствуетъ точкѣ K. Далѣе, радіусомъ KM, дѣлаемъ засѣчку на діаметрѣ GH, получаемъ точку S, и, наконецъ, въ

P возставляемъ перпендикуляръ къ PS до встрѣчи съ GH въ точкѣ R. Разстояніе SR дастъ діаметръ шара, соотвѣтствующій MN.

125.

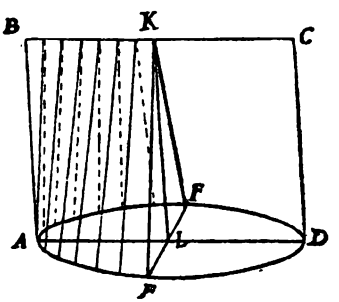
Сосудъ, имѣющій форму цилиндра, наполненъ до верху жидкостью. Требуется вылить ровно половину имѣющейся въ сосудѣ жидкости, не пользуясь при этомъ никакими измѣрительными приборами.

Рѣшеніе. Надо постепенно наклонять сосудъ до тѣхъ поръ, пока поверхность оставшейся въ сосудѣ жидкости не будетъ касаться съ одной стороны наиболѣе низкой точки верхней части сосуда, а съ другой наиболѣе высокой точки дна сосуда. Въ этомъ случаѣ поверхность жидкости раздѣлитъ сосудъ на двѣ равновеликія по объему части.

126.

Указать видъ тѣла, которое могло бы проходить и плотно закрывать собой три отверстія: круглое, квадратное и имѣющее видъ равнобедреннаго треугольника.

Рѣшеніе. Тѣло должно имѣть видъ такъ называемаго *коноидальнаго клина*, который можно построить слѣдующимъ образомъ: возьмемъ кругъ, діаметръ котораго равенъ a. На одномъ изъ діаметровъ круга построимъ квадратъ такъ, чтобы $AB = AD = a$. Взявъ діаметръ EF, перпендикулярный къ AD, и возставивъ перпендикуляръ KL изъ точки L къ плоскости круга, получимъ точку K на сторонѣ квадрата BC. Тогда треугольникъ EKF будетъ равнобедренный съ высотою a. Если теперь мы заставимъ AB двигаться сразу по двумъ направляющимъ: BC и окружности $AFDE$, параллельно плоскости EKF, то и получимъ требуемое тѣло, которое основаніемъ пройдетъ черезъ круглое отверстіе съ діаметромъ a,



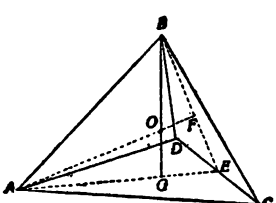
Черт. 10.

частью $ABCD$ пройдетъ черезъ квадратное отверстіе со стороной a, а черезъ отверстіе равнобедреннаго треугольника съ высотою a тѣло пройдетъ частью EKF, при чемъ это тѣло будетъ въ то же время плотно закрывать каждое изъ этихъ отверстій.

127.

Четыре одинаковыхъ шара радіуса R помѣщены такъ, что каждый касается трехъ остальныхъ. Опредѣлить радіусъ шара, находящагося между ними и касающагося каждаго изъ данныхъ четырехъ шаровъ.

Рѣшеніе. Пусть A, B, C и D будутъ центрами данныхъ четырехъ шаровъ, радіусы которыхъ равны R. Соединивъ эти точки между собой, получимъ правильную пирамиду, ребро которой равно $2R$ (такъ какъ шары касаются). Центръ шара, касающагося всѣхъ четырехъ данныхъ шаровъ, будетъ находиться въ точкѣ, равноотстоящей отъ центровъ данныхъ шаровъ, а, слѣдовательно, и отъ вершинъ нашей пирамиды. Не трудно замѣтить, что центръ этого шара будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ пирамиды на противоположныя грани. Если мы найдемъ длину линіи BO, т.-е. разстояніе центровъ даннаго шара отъ искомаго, и вычтемъ величину радіуса R, то получимъ радіусъ r шара, касающагося четырехъ данныхъ шаровъ.



Черт. 11.

Изъ чертежа видно, что $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{(2R)^2-R^2}=$ $=R\sqrt{3}$, а $GE=\frac{AE}{3}=\frac{R\sqrt{3}}{3}$; ($G$ есть точка пересѣченія медіанъ треугольника ADC). Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника BEG, принимая во вниманіе равенство $BE=AE$, имѣемъ:

$BG=\sqrt{BE^2-GE^2}=\sqrt{3R-\frac{3R^2}{9}}=\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. Изъ подобія же прямоугольныхъ треугольниковъ BOF и BEG найдемъ, что

$OB : BF = BE . BG$. Принимая во вниманіе, что $BF = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$, будемъ имѣть:

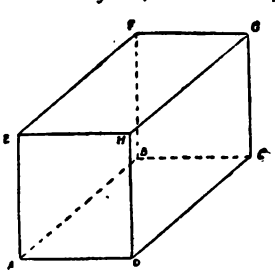
$$OB : \frac{2R\sqrt{3}}{3} = R\sqrt{3} : \frac{2R\sqrt{6}}{3}, \text{ откуда } OB = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

Слѣдовательно, искомый радіусъ $r = \frac{R\sqrt{6}}{2} - R = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-2)$.

128.

Въ одномъ изъ угловъ комнаты, имѣющей видъ прямоугольнаго параллелепипеда, находится паукъ. Найти кратчайшій путь, по которому онъ можетъ добраться до противоположнаго угла.

Рѣшеніе. Пусть паукъ находится въ вершинѣ A параллелепипеда и долженъ добраться до вершины G. Паукъ, очевидно, можетъ выбрать одинъ изъ трехъ возможныхъ въ данномъ случаѣ различныхъ по длинѣ кратчайшихъ путей: по полу $ABCD$ и по стѣнѣ $BPGC$, по стѣнамъ $AEHD$ и $DHGC$ и, наконецъ, по полу $ABCD$ и по стѣнѣ $DHGC$.



Черт. 12.

Для рѣшенія задачи необходимо развернуть въ плоскость двугранные углы $ABCG$, $ADHG$ и $ADCG$ и сравнить между собой длины діагоналей AG. Отвѣтъ на задачу будетъ всецѣло зависѣть отъ величины измѣреній параллелепипеда.

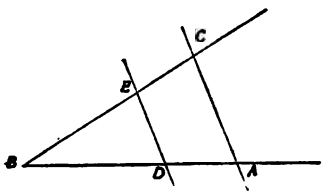
Геометрическіе софизмы.

129.

Отрѣзки двухъ параллельныхъ прямыхъ, заключенные между сторонами даннаго угла, равны между собой.

Пересѣчемъ параллельными прямыми AC и DE стороны угла ABC и докажемъ, что

$$AC=DE.$$



Черт. 13.

Такъ какъ параллельныя линіи отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части, то

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}.$$

Взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, будемъ имѣть:

$$AB\,.\,BE=BD\,.\,BC.$$

Умноживъ обѣ части послѣдняго равенства на выраженіе $(AC—DE)$, имѣемъ:

$$AB\,.\,BE\,.\,(AC—DE)=BD\,.\,BC\,.\,(AC—DE).$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$AB\,.\,BE\,.\,AC—AB\,.\,BE\,.\,DE=BD\,.\,BC\,.\,AC—BD\,.\,BC\,.\,DE,$$

или, перенося членъ $AB\,.\,BE\,.\,DE$ въ правую, а членъ $BD\,.\,BC\,.\,AC$ въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$AB\,.\,BE\,.\,AC—BD\,.\,BC\,.\,AC=AB\,.\,BE\,.\,DE—BD\,.\,BC\,.\,DE,$$

или, вынося общіе множители за скобку, будемъ имѣть:

$$AC(AB\,.\,BE—BD\,.\,BC)=DE(AB\,.\,BE—BD\,.\,BC).$$

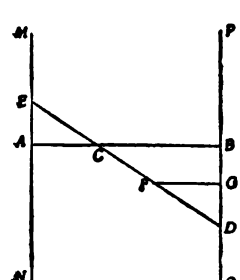
Дѣля, обѣ части на выраженіе $(AB\,.\,BE—BD\,.\,BC)$, имѣемъ окончательно:

$$AC=DE.$$

Разъясненіе. Къ такому результату мы пришли только потому, что позволили себѣ раздѣлить обѣ части равенства на выраженіе $(AB\,.\,BE—BD\,.\,BC)$, равное нулю. Дѣйствительно

$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}$; $AB\,.\,BE=DB\,.\,BC$ или $AB\,.\,BE—DB\,.\,BC=0$.

130.



Черт. 14.

Часть равна цѣлому.

Докажемъ, что $AB=AC$.

Проведя прямыя MN и PQ перпендикулярно къ линіи AB и сѣкущую ED, найдемъ, что треугольники CBD и ACE подобны.

Вслѣдствіе этого

$$\frac{BD}{AE}=\frac{CB}{AC}=\frac{AB—AC}{AC} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Проведя FG параллельно AB, изъ подобныхъ треугольниковъ FGD и CBD имѣемъ:

$$\frac{BD}{GD}=\frac{BC}{FG}=\frac{AB-AC}{FG} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Опредѣляя изъ обѣихъ пропорцій BD, имѣемъ:

$$BD=\frac{AE(AB-AC)}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и

$$BD=\frac{GD(AB-AC)}{FG} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно:

$$\frac{AE(AB-AC)}{AC}=\frac{GD\,(AB-AC)}{FG} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Умножая обѣ части равенства (5) на произведеніе $AC.FG$, имѣемъ:

$$AE\,.\,FG(AB-AC)=AC\,.\,GD(AB-AC).$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$AE\,.\,GF\,.\,AB-AE\,.\,FG\,.\,AC=AC\,.\,GD\,.\,AB-AC^2\,.\,GD.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по выраженію: $(AE\,.\,GF.AC-DG\,.\,AB\,.\,AC)$ и производя сокращенія, имѣемъ:

$$AE\,.\,FG\,.\,AB-DG\,.\,AB\,.\,AC=AE\,.\,GF\,.\,AC-AC^2\,.\,GD$$

или

$$AB(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC)=AC(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC).$$

Дѣля обѣ части на $(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC)$, получаемъ:

$$AB=AC.$$

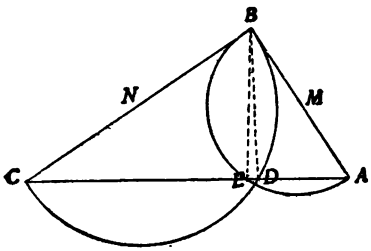
Разъясненіе. Къ абсурдному результату мы пришли только потому, что дѣлили обѣ части равенства на выраженіе $(AE\,.\,FG-DG\,.\,AC)$, равное нулю; дѣйствительно изъ подобія треугольниковъ AEC и FGD слѣдуетъ, что $\frac{AE}{DG}=\frac{AC}{FG}$ или $AE\,.\,FG-DG\,.\,AC=0$.

131.

Изъ точки на прямую можно опустить два перпендикуляра.

Возьмемъ треугольникъ ABC; стороны AB и BC въ точкахъ M и N раздѣлимъ пополамъ и опишемъ на нихъ, какъ

на діаметрахъ, окружности, которыя пересѣкутъ сторону AC въ точкахъ D и E. Уголъ AEB, какъ опирающійся на діаметръ AB, будетъ прямой, а уголъ BDC, какъ опирающійся на діаметръ BC, также прямой.



Черт. 15.

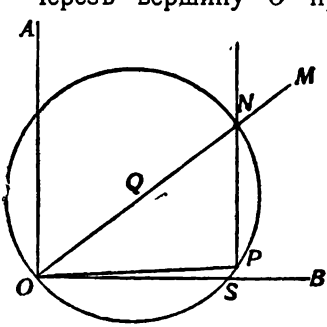
Изъ этого слѣдуетъ что линіи BD и BE, исходящія изъ одной точки B, будутъ перпендикулярны къ сторонѣ AC; слѣдовательно, изъ точки B на линію AC можно опустить два перпендикуляра.

Разъясненіе. Абсурдный выводъ полученъ изъ неправильнаго чертежа; точка пересѣченія окружностей, какъ не трудно убѣдиться, должна лежать какъ разъ на прямой AC.

132.

Изъ точки, взятой на прямой, можно возставить къ этой прямой два перпендикуляра.

Черезъ вершину O прямого угла проведемъ подъ произвольнымъ угломъ съ OB прямую OM и на ней отложимъ произвольный отрѣзокъ ON.



Черт. 16.

Радіусомъ $OQ = \frac{ON}{2}$ опишемъ окружность. Изъ точки N проведемъ прямую, параллельную AO, до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ P. Уголъ OPN, какъ опирающійся на діаметръ, прямой. Такъ какъ AO параллельна NP, то уголъ AOP также прямой.

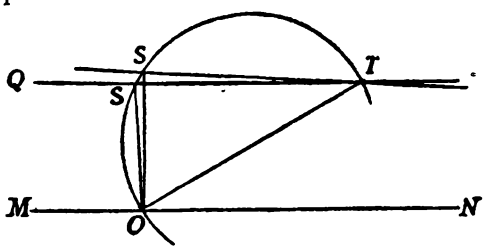
Слѣдовательно, въ точкѣ O прямой AO возставлены два перпендикуляра OB и OP.

Разъясненіе. Ошибка допущена въ чертежѣ: точка P должна непремѣнно совпасть съ точкой S.

133.

Черезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести къ этой прямой двѣ параллельныя.

Черезъ точку T проводимъ прямую TQ, параллельную MN. Соединивъ затѣмъ T съ какой-нибудь точкой O прямой MN, построимъ на OT, какъ на діаметрѣ, окружность. Въ точкѣ O возставимъ къ MN перепендикуляръ и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ S. Уголъ TSO, какъ опирающійся на діаметръ, прямой, а поэтому прямая ST параллельна MN.



Черт. 17.

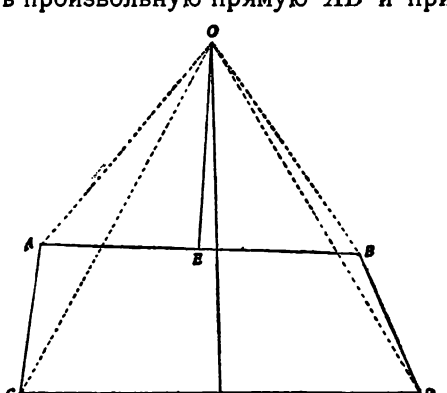
Слѣдовательно, черезъ точку T проведены двѣ прямыя QT и ST, параллельныя MN.

Разъясненіе. Полученный результатъ основанъ исключительно на неправильности чертежа: точка S должна непремѣнно слиться съ точкой S'.

134.

Въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ неравные углы.

Для доказательства беремъ произвольную прямую AB и при точкѣ A строимъ произвольный уголъ BAC, отложивъ на другой сторонѣ этого угла отрѣзокъ AC. При точкѣ B строимъ уголъ ABD, большій угла BAC, и, откладывая отрѣзокъ BD, равный AC, соединяемъ точки C и D. Раздѣливъ AB и CD пополамъ въ точкахъ E и F, возставимъ къ нимъ перпенди-



Черт. 18.

куляры OE и OF, которые пересѣкутся въ точкѣ O. Соединяя затѣмъ точку O съ вершинами A, B, C и D и замѣтивъ, что $AC=BD$ (по построенію), $AO=OB$, какъ наклонныя, равно-удаленныя отъ основанія перпендикуляра OE, и $OC=OD$, какъ наклонныя, равно-удаленныя отъ основанія перпендикуляра OF, находимъ, что въ треугольникахъ AOC и BOD всѣ три стороны одного соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другого. Но такъ какъ $\angle EAO=\angle EBO$ (изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ AEO и BEO), а $\angle DBE>\angle CAE$, то $\angle DBE+\angle EBO>\angle CAE+\angle EAO$.

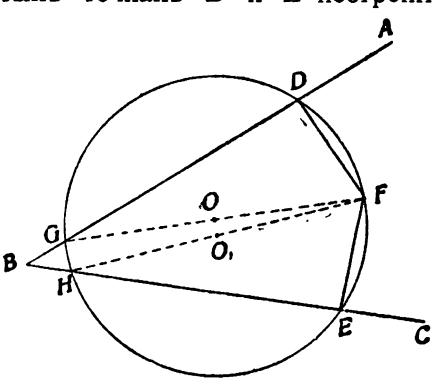
Слѣдовательно, $\angle DBO>\angle CAE$, т.-е. противъ равныхъ сторонъ OC и OD лежатъ неравные углы.

Разъясненіе. Точка O пересѣченія перпендикуляровъ получена неправильно. При правильномъ выполненіи чертежа линія OD не пересѣчетъ отрѣзка AB, а его продолженіе, и уголъ OBD будетъ безусловно равенъ углу OAC.

135.

Всякая окружность имѣетъ два центра.

Возьмемъ произвольный уголъ ABC и въ произвольно взятыхъ точкахъ D и E построимъ прямые углы GDF и HEF.



Черт. 19.

Далѣе проведемъ окружность черезъ точки D, E и F и положимъ, что она пересѣчетъ стороны даннаго угла въ точкахъ G и H. Соединяя точки G и H съ точкою F и замѣчая, что углы GDF и HEF прямые, заключаемъ, что линіи GF и HC должны быть діаметрами данной окружности, потому что на нихъ опираются вписанные прямые углы. Но, какъ извѣстно, центръ окружности лежитъ на срединѣ діаметра, слѣдовательно онъ долженъ лежать и въ точкѣ O и въ точкѣ O_1. Отсюда заключаемъ, что окружность имѣетъ два центра.

Разъясненіе. Неправиленъ чертежъ: окружность, проходящая черезъ точки D, F и E должна обязательно пройти также и черезъ точку B, четвертую вершину четыреугольника, имѣющаго два прямыхъ противоположныхъ угла.

136.

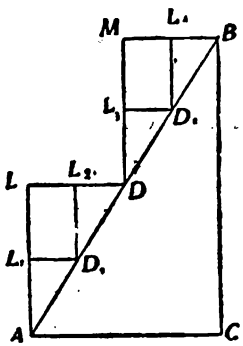
Сумма катетовъ равна гипотенузѣ.

Изъ точки D, дѣлящей пополамъ гипотенузу прямоугольнаго тр-ка ABC, проводимъ линіи DM и DL, а изъ точекъ A и B линіи AL и BM, соотвѣтственно параллельныя BC и AC. Тогда $BC=AL+DM$ и $AC=MB+LD$. Сложивъ эти два равенства, найдемъ:

$$BC+AC=AL+LD+DM+MB,$$

т.-е. сумма катетовъ равна длинѣ ломаной линіи. Выполнивъ то же построеніе для прямоугольныхъ треугольниковъ ALD DMB, убѣдимся, что

$$BC+AC=AL_1+L_1D_1+D_1L_2+L_2D+DL_3+$$
$$L_3D_2+D_2L_4+L_4B\ldots(1)$$



Черт. 20.

Увеличивая аналогичнымъ построеніемъ число звеньевъ ломаной линіи, мы тѣмъ самымъ будемъ все больше и больше уменьшать длины звеньевъ. Когда число звеньевъ будетъ безконечно велико, ломаная линія сольется съ гипотенузой. Слѣдовательно, равенство (1), имѣющее мѣсто при любомъ числѣ звеньевъ ломаной линіи, не нарушится, если вмѣсто суммы звеньевъ ломаной линіи подставимъ длину гипотенузы AB. Такимъ образомъ, вмѣсто равенства (1) можно написать, что

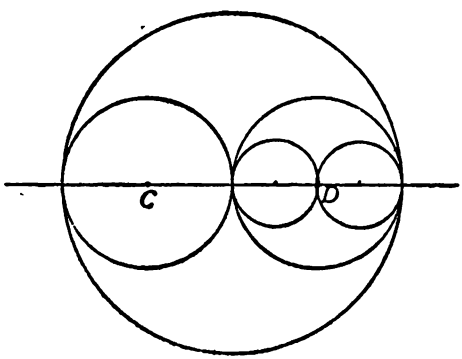
$$BC+AC=AB.$$

Разъясненіе. Мы предположили, что ломаная линія при увеличеніи числа ея звеньевъ стремится слиться съ гипотенузой и совсѣмъ упустили изъ виду, что длина ломаной линіи есть величина постоянная, равная всегда суммѣ катетовъ. Все разсужденіе ведется такъ, какъ будто бы гипотенуза является предѣломъ ломаной линіи, но само опредѣленіе предѣла предполагаетъ наличность перемѣнной величины, каковой здѣсь не имѣется.

137.

Окружность круга равна его діаметру.

Окружность круга радіуса R равна $2\pi R$. Если раздѣлимъ діаметръ на 4 равныя части и опишемъ окружности радіуса $\frac{R}{2}$, то длина каждой окружности будетъ $2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R$, а сумма длинъ двухъ полученныхъ меньшихъ окружностей будетъ равна $2\pi R$, т.-е. длинѣ первоначальной окружности. Легко убѣдиться, что, при дѣленіи діаметра данной окружности на 8, 16, 32... частей, мы можемъ на діаметрѣ построить 4, 8, 16... окружностей, сумма длинъ которыхъ будетъ равна длинѣ данной окружности радіуса R. Съ другой стороны, при безконечномъ увеличеніи числа окружностей, ихъ радіусы станутъ безконечно малыми, а сами окружности обратятся въ точки, расположенныя по діаметру данной окружности.



Черт. 21.

Такимъ образомъ діаметръ первоначальной окружности будетъ служить предѣломъ суммы этихъ малыхъ окружностей. Отсюда можно заключить, что окружность даннаго круга равна его діаметру т. е. что $2\pi R = 2R$, откуда $\pi = 1$.

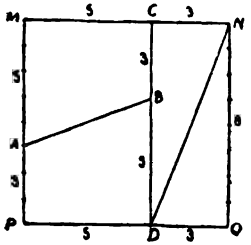
Разъясненіе. Этотъ софизмъ, какъ и предыдущій, основанъ на неумѣстномъ примѣненіи теоріи предѣловъ. Сумма длинъ малыхъ окружностей есть величина постоянная, равная всегда длинѣ данной окружности. Разность между этой суммой и діаметромъ не можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, а имѣетъ всегда опредѣленное и конечное значеніе.

138.

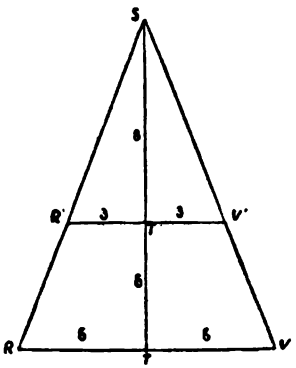
Площадь квадрата больше квадрата его стороны.

Сторона квадрата $MNPQ$ содержитъ 8 какихъ-нибудь ли-

нейныхъ единицъ. Разрѣжемъ этотъ квадратъ на четыре части, какъ указано на лѣвомъ чертежѣ.



Черт. 22.



Черт. 23.

Изъ этихъ частей можно составить треугольникъ RSV (правый чертежъ), равновеликій квадрату. Слѣдовательно площ. $MNPQ$=площ. $RSV=\frac{(5+5)\,.\,(8+5)}{2}=65$ кв. ед., тогда какъ на самомъ дѣлѣ она равна 64 кв. ед.

Разъясненіе. Линіи $RR'S$ и $VV'S$ суть ломаныя, а не прямыя, какъ мы почему-то предположили. Въ самомъ дѣлѣ, если бы эти линіи были прямыми, то изъ подобія треугольниковъ RVS и $R'V'S$ слѣдовало бы, что

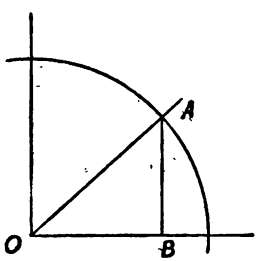
$$\frac{RV}{R'V'}=\frac{ST}{ST'} \text{ или } \frac{10}{6}=\frac{13}{8}.$$

Тригонометрія.

139.

Въ какой четверти сумма синуса и косинуса одного и того же угла больше единицы?

Рѣшеніе. Такъ какъ линіи синуса и косинуса въ любой четверти являются катетами прямоугольнаго треугольника, гипотенузой котораго служитъ радіусъ, то сумма линій синуса и косинуса по абсолютной величинѣ больше радіуса, т.-е. $|AB|+|OB|>OA$ или $\frac{|AB|}{OA}+\frac{|OB|}{OA}>1$. Если же брать синусъ и косинусъ съ соотвѣтствующими знаками, то сумма ихъ будетъ больше единицы только въ томъ случаѣ, когда уголъ взятъ въ первой четверти.



Черт. 24.

140.

Что больше: $\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha$?

Рѣшеніе. Выраженіе $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Такъ какъ $\cos\alpha$ всегда правильная дробь, то $2\sin\alpha$, будучи умножено на $\cos\alpha$, уменьшится.

Слѣдовательно, $2\sin\alpha>\sin 2\alpha$.

141.

Привести къ логариѳмическому виду безъ введенія вспомогательнаго угла выраженіе

$$\cos x=\frac{\cos a-\sin b\sin c}{\cos b\ \cos c}.$$

Рѣшеніе. Прибавляя къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получаемъ:

$$1+\cos x=\frac{\cos b\cos c+\cos a-\sin b\sin c}{\cos b\cos c} \text{ или}$$

$$2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{\cos a+(\cos b\cos c-\sin b\sin c)}{\cos b\cos c}=\frac{\cos a+\cos(b+c)}{\cos b\cos c}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{a-b-c}{2}}{\cos b\cos c}, \text{ откуда}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{a-b-c}{2}}{\cos b\cos c}}.$$

142.

Какова должна быть зависимость между углами x, y и z, чтобы существовало равенство:

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2y-\operatorname{ctg}2z=\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}2y\operatorname{ctg}2z?$$

Рѣшеніе. Данное равенство можно представить въ такомъ видѣ:

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}2y\operatorname{ctg}2z-\operatorname{ctg}2y-\operatorname{ctg}2z=\operatorname{tg}2x(1-\operatorname{ctg}2y\operatorname{ctg}2z)-$$
$$-(\operatorname{ctg}2y+\operatorname{ctg}2z)=0, \text{ или}$$
$$\operatorname{tg}2x(\operatorname{tg}2y\operatorname{tg}2z-1)-(\operatorname{tg}2y+\operatorname{tg}2z)=0.$$

Дѣля обѣ части послѣдняго равенства на $1-\operatorname{tg}2y\operatorname{tg}2z$, получимъ:

$$-\operatorname{tg}2x-\frac{\operatorname{tg}2y+\operatorname{tg}2z}{1-\operatorname{tg}2y\operatorname{tg}2z}=0 \text{ или } \operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}(2y+2z)=0, \text{ откуда}$$

$\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}(-2y-2z)$. Слѣдовательно, $2x+2y+2z=180°k$ или $x+y+z=90°k$, гдѣ k есть произвольное цѣлое число.

143.

Опредѣлить истинное значеніе выраженія

$$\frac{2(8\sin^4x-14\sin^2x+7)\sin^2 2x}{x^2(x^2+x+1)^2} \text{ при } x=0.$$

Рѣшеніе. Данное выраженіе при $x=0$ обращается въ $\frac{0}{0}$.

Представимъ его въ такомъ видѣ:

$$2(8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 7) \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Замѣчая, что $\lim_{x=0}(8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 7) = 7$, $\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x=0}\cos x = 1$, $\lim_{x=0}(x^2+x+1) = 1$, находимъ, что истинное значеніе даннаго выраженія равно $2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1^2} = 56$.

144.

Опредѣлить величину выраженія:

$$\text{Sin}\,[\arcsin x + \arccos x]?$$

Рѣшеніе. Пользуясь формулой для синуса суммы двухъ дугъ, имѣемъ: $\sin[\arcsin x + \arccos x] = \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x)$; но $\sin(\arcsin x) = x$ и $\cos(\arccos x) = x$. Обозначимъ $\arcsin x = y$, тогда $\sin y = x$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Но $\cos y = \cos(\arcsin x)$; слѣдовательно, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. Такимъ же образомъ найдемъ, что $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. Слѣдовательно, данное выраженіе $\sin[\arcsin x + \arccos x] = x \cdot x + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$.

145.

Рѣшить уравненіе:

$$\text{tg}(\text{ctg}\,x) = \text{ctg}(\text{tg}\,x).$$

Рѣшеніе. Такъ какъ $\text{ctg}(\text{tg}\,x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{tg}\,x\right)$, то $\text{tg}(\text{ctg}\,x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{tg}\,x\right)$. Но если тангенсы равны, то углы могутъ отличаться только на $k\pi$, гдѣ k — цѣлое число. Слѣдовательно,

$$\text{ctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{tg}\,x + k\pi \quad \text{или} \quad \frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{\pi}{2} - \text{tg}\,x + k\pi \quad \text{или}$$

$2\,\text{tg}^2 x - (2k+1)\pi\,\text{tg}\,x + 2 = 0$, откуда

$$\text{tg}\,x = \frac{(2k+1)\pi \pm \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 16}}{4};$$ слѣдовательно

$$x = \text{arctg}\frac{(2k+1)\pi \pm \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 16}}{4}.$$

146.

Рѣшить уравненіе:

$$\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$$

Рѣшеніе. $\sin 2x+(1+\cos 2x)+(\sin x+\cos x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)=2\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0$

откуда $\sin x+\cos x=0$ или $2\cos x+1=0$.

Изъ перваго уравненія имѣемъ:

$\cos x=-\sin x=\sin(-x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, откуда $x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

$x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x_2$ (невозможно); $x_2=2k\pi-\frac{\pi}{2}-x_2$, откуда $x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi$. Изъ второго уравненія $2\cos x+1=0$ получаемъ:

$$\cos x=-\frac{1}{2};\text{ откуда}$$

$$x_3=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

147.

Рѣшить уравненіе:

$$\operatorname{tg} x-\frac{8\sin^2 x+3\sin 2x+1}{8\cos^2 x+2\sin 2x+1}=0.$$

Рѣшеніе. Въ дробномъ членѣ уравненія замѣняемъ 1 черезъ $\sin^2 x+\cos^2 x$, а $\sin 2x$ черезъ $2\sin x\cos x$. Тогда

$$\operatorname{tg} x-\frac{8\sin^2 x+3\sin 2x+1}{8\cos^2 x+3\sin 2x+1}=\operatorname{tg} x-\frac{9\sin^2 x+6\sin x\cos x+\cos^2 x}{9\cos^2 x+6\sin x\cos x+\sin^2 x}=$$

$$=\operatorname{tg} x-\frac{(3\sin x+\cos x)^2}{(3\cos x+\sin x)^2}=0.$$

Дѣля числителя и знаменателя дроби на $\cos x$, получаемъ:

$$\operatorname{tg} x-\left(\frac{\frac{3\sin x}{\cos x}-1}{3+\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^2=\operatorname{tg} x-\left(\frac{3\operatorname{tg} x-1}{3+\operatorname{tg} x}\right)^2=0;$$

$9\operatorname{tg} x+6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x-9\operatorname{tg}^2 x-6\operatorname{tg} x-1=0$; $\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-1=0$ или $(\operatorname{tg} x-1)^3=0$, откуда $\operatorname{tg} x=1$, а $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, гдѣ k есть произвольное цѣлое число.

148.

Рѣшить уравненіе:

$$\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0.$$

Рѣшеніе. Прибавимъ и вычтемъ выраженіе $2\sin^2 x\cos^2 x$; тогда уравненіе приметъ видъ:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{\sin^2 2x}{2}-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{\sin^2 2x}{2}-$$

$$-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0.$$

Освободившись отъ дробей и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ: $\sin^2 2x-8\sin 2x+4=0$, откуда $\sin 2x=4\pm\sqrt{12}$ или $\sin 2x=4+\sqrt{12}$ и $\sin 2x=4-\sqrt{12}$. Первый, большій, корень не даетъ дѣйствительнаго значенія для x, такъ какъ $4+\sqrt{12}>1$. Меньшій корень, послѣ вычисленія съ помощью логариѳмическихъ таблицъ, даетъ $2x=34°22'47''$, откуда $x=k\pi+$ $+(-1)^k 17°11'23{,}5''$, гдѣ k—произвольное цѣлое число.

149.

Рѣшить уравненіе;

$$\sin(x+3a)=3\sin(a-x).$$

Рѣшеніе. Представимъ уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$\sin x\cos 3a+\cos x\sin 3a=3\sin a\cos x-3\cos a\sin x,$

$\sin x\cos 3a+3\cos a\sin x=3\sin a\cos x-\cos x\sin 3a,$

$\sin x(\cos 3a+3\cos a)=\cos x(3\sin a-\sin 3a)$

$\frac{\sin x}{\cos x}(\cos 3a+3\cos a)=3\sin a-\sin 3a,$

$\operatorname{tg} x(\cos 3a+3\cos a)=3\sin a-\sin 3a,$ откуда

$$\operatorname{tg} x=\frac{3\sin a-\sin 3a}{\cos 3a+3\cos a}.$$

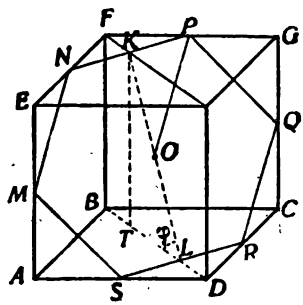
Принимая во вниманіе, что $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$, а $\cos 3a=$ $=4\cos^3 a-3\cos a$, получимъ:

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 a,\text{ откуда }x=m+k\pi,$$

гдѣ m есть наименьшій уголъ, удовлетворяющій равенству $\operatorname{tg} m=\operatorname{tg}^3 a$.

150.

Кубъ пересѣченъ плоскостью такъ, что въ сѣченіи получился правильный шестиугольникъ. Опредѣлить двугранный уголъ, образуемый плоскостью съ основаніемъ куба.



Черт. 25.

Рѣшеніе. Кубъ долженъ быть разсѣченъ плоскостью такъ, какъ указано на чертежѣ. По условію задачи надо опредѣлить уголъ KLB. Обозначимъ его черезъ φ и положимъ, что ребро куба будетъ a. Тогда изъ треугольника NFP получимъ:

$$NP=\sqrt{NF^2+FP^2},\text{ или }NP=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{2}\ldots.(1)$$

такъ какъ ребра куба въ точкахъ M, N, P и т. д. раздѣлены пополамъ. OP, какъ радіусъ окружности, описанной около правильнаго шестиугольника, равенъ сторонѣ этого шестиугольника, т.-е.

$$OP=NP=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Откуда, изъ треугольника OKP, имѣемъ:

$$OK=\sqrt{OP^2-KP^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}}=\sqrt{\frac{6a^2}{16}}=\frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

Далѣе, изъ треугольника KLT, имѣемъ:

$$KT=KL\sin\varphi=2OK\sin\varphi.$$

Принимая во вниманіе значеніе OK, а также и то, что $KT=a$, находимъ:

$$\sin\varphi=\frac{KT}{KL}=\frac{a}{2.\frac{a}{4}\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3},\text{ а }\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

151.

Найти наибольшую и наименьшую величину выраженія

$$a\cos x+b\sin x.$$

Рѣшеніе. Если a и b равны нулю, то данное выраженіе остается равнымъ нулю при всякомъ значеніи x. Пусть одно

изъ количествъ a и b отлично отъ нуля. Въ такомъ случаѣ можно опредѣлить уголъ α, удовлетворяющій равенствамъ:

$$\cos\alpha=\frac{a}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\ *) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

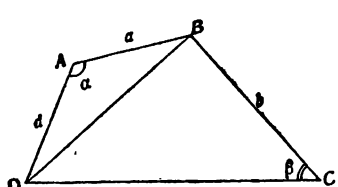
Откуда $a=|\sqrt{a^2+b^2}|\cos\alpha$, $b=|\sqrt{a^2+b^2}|\sin\alpha$; слѣдовательно, данное выраженіе

$a\cos x+b\sin x=|\sqrt{a^2+b^2}|\cos\alpha\cos x+|\sqrt{a^2+b^2}|\sin\alpha\sin x=$
$=|\sqrt{a^2+b^2}|(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)=|\sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\alpha)$. Такъ какъ наибольшее значеніе выраженія $\cos(x-\alpha)$ есть $+1$, а наименьшее его значеніе есть -1, то наибольшая величина даннаго выраженія есть $|\sqrt{a^2+b^2}|$, а наименьшая его величина есть $-|\sqrt{a^2+b^2}|$. Очевидно, что наибольшей величины выраженіе достигаетъ при $x=\alpha+2k\pi$, такъ какъ $\cos(x-\alpha)=1$ и $x-\alpha=2k\pi$, а наименьшей величины оно достигаетъ при $x=\alpha+(2k+1)\pi$, такъ какъ $\cos(x-\alpha)=-1$ и $x-\alpha=(2k+1)\pi$, гдѣ α опредѣляется изъ равенствъ (1) и (2), а k есть произвольное цѣлое число.

152.

Какой изъ четыреугольниковъ, составленныхъ изъ однѣхъ и тѣхъ же сторонъ a, b, c и d, имѣетъ наибольшую площадь?

Рѣшеніе. Обозначимъ противоположные углы четыреугольника (см. черт.) черезъ α и β.



Черт. 26.

Площадь четыреугольника $ABCD=\triangle ABD+\triangle DBC=S$.

Но $\triangle ABD=\frac{ab\sin\alpha}{2}$, а $\triangle DBC=\frac{dc\sin\beta}{2}$, слѣдовательно,

$2S=ad\sin\alpha+bc\sin\beta$. Возводя обѣ части послѣдняго равенства въ квадратъ, получаемъ:

---

*) Знакъ $|\ |$ означаетъ, что надо брать только ариѳметическое значеніе корня.

$$4S^2=a^2d^2\sin^2\alpha+2abcd\sin\alpha\sin\beta+b^2c^2\sin^2\beta=$$
$$=a^2d^2-a^2d^2\cos^2\alpha+2abcd\sin m\sin\beta+b^2c^2-b^2c^2\cos^2\beta=$$
$$=a^2d^2+b^2c^2+2abcd\sin\alpha\sin\beta-(a^2d^2\cos^2\alpha+b^2c^2\cos^2\beta)\ .\ .\ (1)$$

Изъ треугольниковъ ABD и DBC слѣдуетъ, что

$$DB^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\beta,\ \text{откуда}$$
$$2ad\cos\alpha-2bc\cos\beta=a^2+d^2-b^2-c^2\ \text{или}\ ad\cos\alpha-bc\cos\beta=$$
$$=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2},$$

или, по возведеніи въ квадратъ,

$$a^2d^2\cos^2\alpha-2abcd\cos\alpha\cos\beta+b^2c^2\cos^2\beta=\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right)^2\ldots\ (2)$$

Изъ равенства (2) опредѣлимъ $a^2d^2\cos^2\alpha+b^2c^2\cos^2\beta$ и подставимъ въ равенство (1); тогда

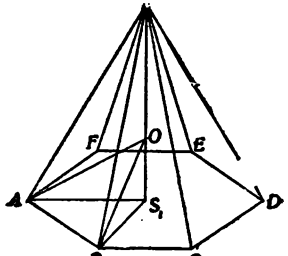
$$4S^2=a^2d^2+b^2c^2+2abcd\sin\alpha\sin\beta-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right)^2-2abcd\cos\alpha\cos\beta$$

или $$4S^2=a^2d^2+b^2c^2-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right)^2-2abcd\cos(\alpha+\beta).$$

Первые три члена полученнаго равенства одинаковы для всѣхъ четыреугольниковъ, составленныхъ изъ однѣхъ и тѣхъ же сторонъ. Не трудно поэтому сообразить, что $4S^2$, а, слѣдовательно, и S, получитъ наибольшую величину, когда $\cos(\alpha+\beta)$ получитъ наименьше значеніе, т.-е. когда $\cos(\alpha+\beta)=-1$. Въ этомъ случаѣ $\alpha+\beta=180°$, а около такого четыреугольника, какъ извѣстно изъ геометріи, можно описать окружность.

153.

Опредѣлить плоскій уголъ при вершинѣ правильной шестиугольной пирамиды, если извѣстно, что центры описаннаго около пирамиды и вписаннаго въ нее шаровъ совпадаютъ.



Черт. 27.

Рѣшеніе. Обозначимъ плоскій уголъ при вершинѣ пирамиды черезъ x, апоѳему пирамиды черезъ k, сторону основанія черезъ $2m$, радіусъ описаннаго шара черезъ k, а радіусъ вписаннаго шара черезъ r.

Изъ прямоугольнаго треугольника ASL имѣемъ:

$$tg\,\frac{x}{2}=\frac{AL}{SL}=\frac{m}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Апоѳема основанія $LS_1=\sqrt{S_1B^2-LB^2}=\sqrt{4m^2-m^2}=m\sqrt{3}$.

Изъ треугольниковъ SS_1L и OS_1B имѣемъ:

$$(R+r)^2=R^2-3m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$R^2-r^2=4m^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Дѣля равенство (2) на равенство (3), получаемъ:

$$\frac{R+r}{R-r}=\frac{R^2-3m^2}{4m^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Равенство (4) представимъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{\frac{R+r}{r}}{\frac{R-r}{r}}=\frac{\frac{k^2-3m^2}{m^2}}{\frac{4m^2}{m^2}} \text{ или } \frac{\frac{R}{r}+1}{\frac{R}{r}-1}=\frac{\frac{k^2}{m^2}-3}{4} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Такъ какъ OL дѣлитъ $\angle SLS_1$ пополамъ, то

$$\frac{R}{r}=\frac{K}{m\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Подставивъ въ равенство (5) вмѣсто $\frac{R}{r}$ и $\frac{K}{m}$ соотвѣтствующія имъ значенія изъ равенствъ (6) и (1), получимъ:

$$\frac{1+\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}}{1-\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}}=\frac{1-3tg^2\frac{x}{2}}{4tg^2\frac{x}{2}}.$$

Сокративъ обѣ части полученнаго равенства на выраженіе $\left(1+\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}\right)$ и освободившись отъ знаменателей, получимъ:

$$\left(1-\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}\right)^2=4tg^2\frac{x}{2} \text{ или } 1-\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}=\pm 2tg\frac{x}{2}, \text{ откуда}$$

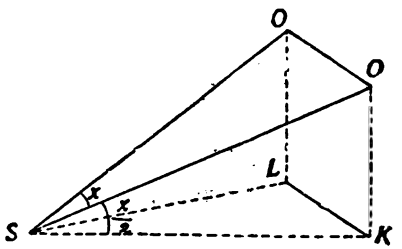
$$\left(tg\,\frac{x_1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}+2}\,;\ \left(tg\,\frac{x_2}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}-2}.$$

Второй отвѣтъ не годится, такъ какъ уголъ x, а, слѣдовательно, и $\frac{x}{2}$, долженъ быть острымъ. Окончательно, плоскій уголъ $x=32°\,23'\,52''$.

154.

На плоскости уложены p одинаковыхъ соприкасающихся конусовъ, вершины которыхъ сходятся въ одной точкѣ. Найти уголъ осевого сѣченія каждаго изъ этихъ конусовъ.

Рѣшеніе. Уголъ между высотами двухъ соприкасающихся конусовъ равенъ искомому углу осевого сѣченія. Пусть O и O_1—центры двухъ соприкасающихся конусовъ, а OS и O_1S—ихъ высоты. Слѣдовательно, искомый уголъ $x = \angle OSO_1$. Изъ центровъ O к O_1 опускаемъ перпендикуляры на плоскость и точки ихъ пересѣченія съ плоскостью соединяемъ съ вершиной S.



Черт. 28.

Треугольникъ KLS служитъ проекціей треугольника OSO_1. Основаніе треугольника OSO_1, или линія центровъ основаній двухъ соприкасающихся конусовъ, $OO_1 = 2\,OS \cdot \sin\frac{x}{2}$.

Далѣе, такъ какъ уголъ $KSL = \frac{360^\circ}{n}$, то $SK = \frac{\frac{KL}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} =$

$$= \frac{OO_1}{2} : \sin\frac{180^\circ}{n} = \left(OS \cdot \sin\frac{x}{2}\right) : \sin\frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots (1)$$

Съ другой стороны, принимая во вниманіе, что уголъ $KSO = \frac{x}{2}$ (уголъ, образованный высотой конуса SO и его образующей SK), можемъ написать: $SK = OS \cdot \cos\frac{x}{2}$ . . . . . (2)

Изъ равенствъ (1) и (2) получаемъ: $\frac{OS \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = OS \cdot \cos\frac{x}{2}$

или $tg\,\frac{x}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}$.

Отсюда $\frac{x}{2} = \text{arc}\,tg\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$, а $x = 2\,\text{arc}\,tg\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$.

Физика.

155.

Имѣются два одинаковаго вида бруска, изъ которыхъ одинъ представляетъ собой магнитъ, а другой—желѣзо. Какимъ образомъ, не прибѣгая ни къ какимъ приборамъ, опредѣлить, какой изъ брусковъ магнитъ и какой желѣзный?

Отвѣтъ. Надо каждый изъ брусковъ поднести къ нейтральной линіи другого.

156.

Какой возъ легче опрокинуть—съ соломой или съ кирпичемъ, при равномъ вѣсѣ возовъ и одинаковомъ устройствѣ телѣгъ?

Отвѣтъ. Легче опрокинуть возъ съ соломой, потому что центръ тяжести будетъ находиться выше, чѣмъ центръ тяжести воза съ кирпичемъ.

157.

Въ сосудъ, наполненный доверху водой, опущено тѣло вѣса P; при этомъ изъ сосуда выливается m граммовъ воды. На сколько измѣнится давленіе жидкости на дно сосуда?

Отвѣтъ. Давленіе на дно не измѣнится, такъ какъ уровень жидкости будетъ на той же высотѣ, а давленіе жидкости не зависитъ отъ формы сосуда, а лишь отъ величины площади основанія сосуда и высоты жидкости.

158.

Можно ли всасывающимъ насосомъ поднять кипящую воду?

Отвѣтъ. Нельзя, потому что при поднятіи поршня уменьшится давленіе на воду, температура кипѣнія понизится, и

увеличенное пространство наполнится парами, слѣдовательно, уровень воды не повысится.

159.

Можно ли намагнитить сталь токами отъ катушки Румкорфа?

Отвѣтъ. Нельзя, потому что токъ спирали перемѣнный, а, слѣдовательно, сталь, будучи въ первый моментъ намагничена, въ слѣдующій размагнитится и т. д. *)

160.

Можно ли сифономъ переливать жидкость въ пустотѣ?

Отвѣтъ. Нельзя, потому что жидкость въ трубкѣ, не будучи поддерживаема давленіемъ воздуха, тотчасъ же распадется на двѣ части.

161.

Представимъ себѣ, что мы постепенно удаляемся отъ поверхности земли въ пространство и летимъ со скоростью, меньшею скорости свѣта; смотря все время по направленію къ землѣ, мы будемъ видѣть тѣ событія, которыя произошли на землѣ послѣ начала нашего полета. Если мы будемъ летѣть со скоростью свѣта, то будемъ видѣть только одно какое-либо событіе, происшедшее въ моментъ, когда мы начали удаляться отъ земли. Если же мы будемъ летѣть со скоростью, большею скорости свѣта, то должны увидѣть послѣдовательно всѣ событія въ обратномъ порядкѣ, т.-е. такъ, какъ если бы мы смотрѣли на кинематографическую ленту, пропущенную въ аппаратъ съ конца; вслѣдствіе этого явилась бы возможность видѣть и сотвореніе человѣка. Вѣрны ли эти разсужденія?

Отвѣтъ. Нѣтъ. Прежде, чѣмъ мы станемъ двигаться со скоростью свѣта, мы уже ничего не увидимъ. Прекращеніе дѣйствія лучей на глазъ будетъ зависѣть какъ отъ относительной

*) Замѣтимъ, что структура этого вопроса достаточно сложна и отвѣтъ на него требуетъ болѣе глубокихъ разсужденій.

скорости движенія свѣта по сравненію съ нашимъ движеніемъ, такъ и отъ того, что нашъ глазъ воспринимаетъ колебанія только до извѣстнаго максимума длины волны. Чтобы отвѣтить на вопросъ детально, слѣдуетъ выяснить предѣлъ длины ультрафіолетовыхъ волнъ, отражаемыхъ земными предметами, и по этому предѣлу, съ помощью принципа Допплера, опредѣлить ту предѣльную скорость, двигаясь съ которой, мы уже ничего не увидимъ.

162.

Опредѣлить температуру, при которой термометры Реомюра и Фаренгейта показываютъ одно и то же число градусовъ.

Рѣшеніе. Пусть искомое число градусовъ на термометрахъ Реомюра и Фаренгейта будетъ $x°$. Если по Реомюру $x°$, то по Фаренгейту будетъ: $(\frac{9}{4}x+32)°$. Изъ условія задачи слѣдуетъ, что $x=\frac{9}{4}x+32$.

Рѣшая послѣднее ур-іе имѣемъ: $x=-25{,}6°$.

163.

Въ оптическомъ магазинѣ выставлено 20 термометровъ, изъ которыхъ 10 термометровъ Реомюра, а остальные Цельсія и Фаренгейта. Опредѣлить температуру въ магазинѣ по Реомюру, если извѣстно, что сумма градусовъ, показываемыхъ всѣми термометрами, равна 453^0, а температура въ магазинѣ по Реомюру вдвое больше числа термометровъ Цельсія.

Рѣшеніе. Пусть термометръ Реомюра, висѣвшій въ магазинѣ, показывалъ x градусовъ. При тѣхъ же условіяхъ, термометръ Цельсія долженъ показывать $\frac{5}{4}x$ градусовъ, а термометръ Фаренгейта $32+\frac{9}{4}x°$. Пусть число градусовъ Цельсія было y; тогда, по условію задачи, температура въ магазинѣ была вдвое больше числа термометровъ Цельсія, т.-е.

$$x=2y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Съ другой стороны, термометровъ Реомюра было 10 и каждый показывалъ $x°$, слѣдовательно, всѣ термометры Реомюра показывали $10x°$. Если число градусовъ Цельсія было y, и ка-

ждый показывалъ $\frac{5}{4}x°$, то всѣ термометры Цельсія показывали $\frac{5}{4}xy°$. Такъ какъ всего термометровъ Цельсія и Фаренгейта было 20—10=10, а термометровъ Цельсія y, то термометровъ Фаренгейта было 10—y; если каждый изъ послѣднихъ показывалъ $(32+\frac{9}{4}x)°$, то всѣ термометры Фаренгейта покажутъ $(32+\frac{9}{4}x)(10—y)$ градусовъ.

По условію задачи имѣемъ:

$$10x+\frac{5}{4}xy+(32+\frac{9}{4}x)(10—y)=453 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Упростивъ это ур-іе и принимая во вниманіе ур-іе (1), найдемъ, что $y=7$ и $x=2y=14$.

164.

По свидѣтельству Витрувія, корона сиракузскаго царя Гіерона, состоявшая изъ сплава золота и серебра, вѣсила 10 килограммовъ. Вѣсъ короны въ водѣ былъ равенъ 93,55% вѣса ея въ воздухѣ. Зная, что удѣльный вѣсъ золота равенъ 19,25 и удѣльный вѣсъ серебра равенъ 10,5, опредѣлить количество каждаго изъ металловъ, входившихъ въ составъ короны.

Рѣшеніе. Пусть вѣсъ находившагося въ коронѣ золота будетъ x, тогда вѣсъ серебра (10—x). По закону Архимеда, всякое тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ въ своемъ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ вытѣсненная имъ жидкость; кромѣ того, изъ условія задачи видимъ, что вода легче золота въ 19,25 раза, а серебро въ 10,5 раза. Отсюда заключаемъ, что золото въ водѣ теряетъ $\frac{x}{19,25}$ кгр., а серебро $\frac{10—x}{10,5}$ кгр. Корона же въ воздухѣ вѣситъ 10 кгр., а въ водѣ 93,55% своего вѣса; поэтому если, каждый килограммъ вѣсилъ въ водѣ $\frac{93,55}{100}$ своего вѣса, то 10 кгр. будутъ вѣсить $\frac{10\,.\,93,55}{100}=9,355$ кгр., поэтому корона потеряетъ въ вѣсѣ 10—9,355=0,645 кгр. По условію задачи:

$$\frac{x}{19,25}+\frac{10—x}{10,5}=0,645.$$

Слѣдовательно $x=7,1005$ кгр.

165.

На плоское зеркало падаетъ лучъ свѣта, образуя съ отраженнымъ лучемъ уголъ β. Зеркало повернуто на уголъ α такъ, что отраженный лучъ съ падающимъ остались въ прежней плоскости. Опредѣлить уголъ между новымъ положеніемъ лучей.

Рѣшеніе. Какъ видно изъ условій задачи, лучъ падающій, съ перпендикуляромъ въ точкѣ паденія, образуетъ уголъ $\frac{\beta}{2}$; если зеркало будетъ повернуто на уголъ α, то падающій лучъ съ перпендикуляромъ въ точкѣ паденія будетъ составлять уголъ $\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)$ (въ этомъ можно убѣдиться, построивъ чертежъ). Поэтому, уголъ между лучами будетъ:

$$\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)+\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right)=\beta+2\alpha.$$

166.

Торговецъ долженъ былъ отвѣсить двумъ покупателямъ по одинаковому числу фунтовъ товару, но его вѣсы были невѣрны—одно плечо коромысла было короче другого. Для перваго покупателя онъ положилъ грузъ на короткое плечо, а товаръ—на длинное, а другому наоборотъ. Выигралъ или потерялъ торговецъ при такомъ взвѣшиваніи товара?

Рѣшеніе. Обозначимъ черезъ a и b длины плечъ коромысла. Пусть покупатели требовали вѣсъ p. Первый изъ нихъ получилъ вѣсъ q_1, а второй q_2.

Извѣстно, что для равновѣсія рычага необходимо и достаточно, чтобы дѣйствующіе на его плечи моменты были равны и противоположны.

Когда торговецъ взвѣшивалъ товаръ 1-му покупателю, то на одно плечо дѣйствовала сила p, а на другое q_1.

Моментъ силы p равенъ pa. Его уравновѣшиваетъ моментъ силы q_1, равный $q_1 b$ и вращающій рычагъ въ противоположную сторону.

Такимъ образомъ $p\ a=q_1 b$.

Откуда $$q_1=p\cdot\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Пользуясь равенствомъ моментовъ и при второмъ взвѣшиваніи получимъ:

$$pb=q_2\cdot a.$$

Откуда $$q_2=p\cdot\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Всего торговецъ продалъ

$$q_1+q_2=p\,\frac{a}{b}+p\,\frac{b}{a}, \text{ или}$$

$$q_1+q_2=p\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Независимо отъ величинъ a и b, мы всегда имѣемъ:

$$(a-b)^2>0,$$

т.-е. что $(a-b)^2$ есть величина положительная. Отсюда

$$a^2-2ab+b^2>0$$
$$a^2+b^2>2ab$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}>2$$
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)>2p.$$

Замѣняя въ равенствѣ (c) выраженіе $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ числомъ 2, получимъ неравенство

$$p\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)>2,$$

откуда заключаемъ, что

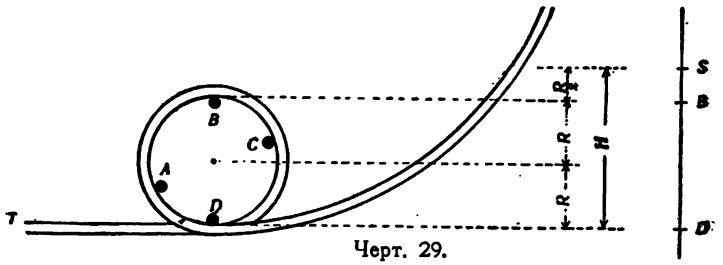
$$q_1+q_2>2p,$$

т.-е. торговецъ потерялъ.

167.

На чертежѣ 29 изображена петля $SDABCT$ съ правильной окружностью ABC посрединѣ. Въ точкѣ S, отстоящей отъ земли на высотѣ H, помѣщено тѣло съ массою m, могущее скользить внизъ безъ тренія.

Съ какой высоты тѣло должно начать свое движеніе, чтобы совершить полностью свой путь $SDABCT$.



Черт. 29.

Рѣшеніе. Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, замѣтимъ, что скорость тѣла зависитъ только отъ той высоты, на которую оно при паденіи опустилось но не зависитъ отъ величины угла наклонной плоскости *), по которой оно скрывается.

Когда тѣло пройдетъ путь SD, то на пріобрѣтенную имъ скорость окажетъ вліяніе только та высота H, на которую оно опустилось и вовсе не окажетъ вліянія длина пути SD, а также и различная «крутизна» его въ точкахъ S и D; скорость тѣла въ точкѣ D будетъ равна

$$v_0=\sqrt{2gH},$$

гдѣ g—ускореніе силы тяжести.

Подъ вліяніемъ пріобрѣтенной при паденіи энергіи (которая равна $\frac{mv^2}{2}$), тѣло начнетъ подниматься вверхъ по пути AB и можетъ подняться какъ разъ на такую же высоту, съ какой опустилось. Въ этомъ заключается законъ сохраненія энергіи. Опускаясь съ высоты H тѣло уменьшаетъ свою потенціальную энергію (энергію положенія), но увеличиваетъ кинетическую (энергію движенія), и какъ разъ на величину, равную потерянной потенціальной. Такимъ образомъ, когда тѣло приходитъ изъ S въ D, его кинетическая энергія равна $\frac{mv_0^2}{2}$, а потенціальная уменьшается на mgH, а потому

$$\frac{mv_0^2}{2}=mgH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

*) См. по этому поводу въ курсахъ физики (отдѣлъ механики).

Когда же тѣло начнетъ подниматься, то потенціальная энергія его будетъ увеличиваться, а кинетическая уменьшаться; когда тѣло придетъ въ B, т.-е. поднимется на высоту діаметра, равнаго $2R$, то потеря кинетической энергіи будетъ $\frac{mv_1^2}{2}$, а увеличеніе потенціальной $mg(2R)$, поэтому

$$\frac{mv_1^2}{2}=mg\,.\,2R\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Если въ D энергія движенія $\frac{mv_0^2}{2}$, а по пути въ B (черезъ A) потеряется $\frac{mv_1^2}{2}$, то въ B энергія движенія будетъ равна

$$\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\frac{mv^2}{2}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Вычитая (b) изъ (a), найдемъ

$$\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=mgH-mg2R.$$

Соединяя это равенство съ (c), получаемъ

$$\frac{mv^2}{2}=mgH-mg\,.\,2R=mg(H-2R) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Итакъ, тѣло въ точкѣ B имѣетъ какъ разъ энергію движенія, равную потерѣ потенціальной $[mg(H-2R)=mg\,.\,SB]$.

Пользуясь равенствомъ (d) мы можемъ найти скорость v тѣла въ точкѣ B.

Когда же тѣло можетъ совершить весь путь $SDABCT$? Ясно, что только тогда, когда, пробѣгая черезъ точку B, тѣло будетъ прижиматься къ траэкторіи какою-либо силою; въ противномъ случаѣ оно упадаетъ внизъ. А такая сила, дѣйствительно, найдется. Это будетъ центробѣжная сила. Она зависитъ отъ скорости движенія по окружности. Если скорость движенія по окружности будетъ v, а радіусъ окружности R, то центробѣжная сила F будетъ

$$F=\frac{mv^2}{R}.$$

Въ точкѣ B, гдѣ скорость движенія будетъ наименьшая (т. к. всѣ остальныя точки окружности ниже точки B) на наше тѣло дѣйствуютъ двѣ силы—вѣсъ тѣла P, направленный внизъ

и центробѣжная сила F, направленная вверхъ, т. к. она стремится удалить тѣло отъ центра. Чтобы тѣло оставалось на траэкторіи, необходимо, чтобы F было больше P, т.-е чтобы

$$\frac{mv^2}{R} > mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Пользуясь уравненіемъ (d) найдемъ:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{2 \cdot mg(H-2R)}{R}.$$

Подставляя это въ неравенство (e), получаемъ

$$\frac{2mg(H-2R)}{R} > mg, \text{ откуда}$$

$$2(H-2R) > R$$

$$2H-4R > R$$

$$2H > 5R \text{ и, наконецъ}$$

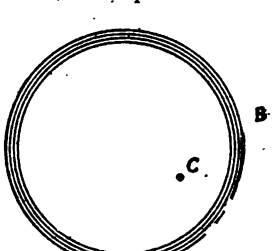
$$H > \frac{5}{2}R.$$

Поэтому, для того, чтобы тѣло описало при своемъ движеніи полную петлю, оно должно начать свое движеніе съ высоты, большей $\frac{5}{2}R$.

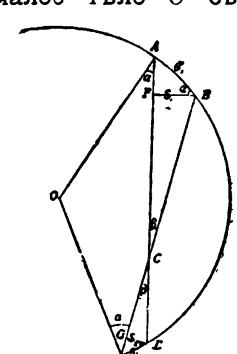
168.

Какое положеніе приметъ матеріальная палочка, если ее помѣстить внутри однородной сферы, пустой внутри, притягивающей по закону Ньютона.

Рѣшеніе. Пусть дана матеріальная сфера AB (черт. 30). Помѣстимъ внутри ея безконечно-малое тѣло C съ массою m_1. Разобьемъ сферу на безконечно большое число сферическихъ концентрическихъ по-



Черт. 30



Черт. 31.

верхностей и будемъ разсматривать притяженіе каждой изъ этихъ поверхностей.

На чертежѣ 31 представлена одна изъ такихъ сферъ. Построимъ конусъ съ вершиною въ точкѣ C, настолько узкій, чтобы уголъ β между образующими (при осевомъ сѣченіи конуса) былъ почти равенъ нулю, т.-е. чтобы линіи AD и BE почти совпадали. Тогда углы OAD и OEB будутъ такъ мало отличаться одинъ отъ другого, что ихъ можно считать равными.

Разсматриваемая коническая поверхность вырѣжетъ на сферѣ безконечно-малыя площадки AB и ED, величины которыхъ обозначимъ черезъ σ_1 и σ_2. Вслѣдствіе того, что эти площадки безконечно-малы, ихъ можно считать плоскими. Изъ чертежа видно, что первая изъ нихъ перпендикулярна къ AO, а вторая—къ OE.

Проведемъ черезъ точки B и D двѣ плоскости, перпендикулярныя къ оси конуса; вслѣдствіе того, что BE и AD почти сливаются, эти плоскости будутъ перпендикулярны къ нимъ. Плоскости, пересѣкаясь съ поверхностью конуса, дадутъ круглыя площадки BF и DG. Обозначимъ величины этихъ площадокъ черезъ S_1 и S_2. Изъ чертежа видно, что

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 \cos\alpha \\ S_2 &= \sigma_2 \cos\alpha \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если на единицѣ площади данной сферической поверхности находится масса m, то на площадкахъ σ_1 и σ_2 масса будетъ $m\sigma_1$ и $m\sigma_2$.

Разсмотримъ, какъ эти массы $m\sigma_1$ и $m\sigma_2$ будутъ притягивать точку C.

Вслѣдствіе того, что точки A и B почти совпадаютъ, можно считать, что C находится отъ σ_1 на разстояніи AC; аналогично заключимъ, что C отстоитъ отъ σ_2 на разстояніи CD. Эти разстоянія по тѣмъ же причинамъ можно считать высотами конусовъ CBF и CDG.

Сила взаимнаго притяженія выражается формулой

$$f = \frac{m_1 m_2}{v_2},$$

гдѣ m_1 и m_2—массы взаимодѣйствующихъ тѣлъ, а v—разстояніе между ними.

Въ разсматриваемомъ случаѣ точка C массы m_1 притягивается площадкою σ_1 массы $m\sigma_1$ въ одну сторону, и площадкою σ_2 массы $m\sigma_2$ въ другую. Первая сила притяженія равна

$$f_1=\frac{m_1 . m\sigma_1}{AC^2},$$

а вторая

$$f_2=\frac{m_1 . m\sigma_2}{CD^2}.$$

Опредѣлимъ, какая изъ этихъ силъ больше.

Изъ равенства (1) получаемъ

$$\sigma_1=\frac{S_1}{\cos\alpha} \text{ и } \sigma_2=\frac{S_2}{\cos\alpha}.$$

Подставляя въ выраженія силъ, получимъ

$$f_1=\frac{m_1 m . S_1}{AC^2 . \cos\alpha} \text{ и } f_2=\frac{m_1 . m . S_2}{CD^2 . \cos\alpha}.$$

Возьмемъ отношеніе этихъ силъ

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{m_1 . mS_1 . CD^2 . \cos\alpha}{AC^2 . \cos\alpha . m_1 . m . S^2}=\frac{S_1 . CD^2}{S_2 . AC^2}.$$

Изъ чертежа видно, что

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AC^2}{CD^2},$$

откуда $S_1 . CD^2=S_2 . AC^2$ или, дѣля обѣ части равенства на $S_2 . AC$, получимъ

$$\frac{S_1 . CD^2}{S_2 . AC^2}=1.$$

Подставляя полученный результатъ въ отношеніе силъ f_2 и f_1, найдемъ

$$\frac{f_1}{f_2}=1;$$

т.-е. эти силы равны. А такъ какъ онѣ направлены въ прямопротивоположныя стороны, то онѣ уничтожаются, и на нашу точку никакія силы не будутъ дѣйствовать.

Вслѣдствіе того, что конусы, аналогичные разсмотрѣнному, можно провести по всѣмъ направленіямъ, заключаемъ, что на данную точку сферическая поверхность дѣйствовать не будетъ.

Такъ какъ всѣ сферическія поверхности, на которыя разбита данная сфера, совершенно равноправны, то и вся сфера не будетъ дѣйствовать на точку.

Но всѣ точки данной палочки такъ же равноправны, а потому и на всю палочку не будетъ дѣйствовать никакихъ силъ.

Если бы земля была пустотѣлой сферой, то всякое тѣло, помѣщенное внутри ея, не имѣло бы никакого вѣса и держалось бы въ пространствѣ безъ всякой поддержки.

169.

Представимъ себѣ земной шаръ просверленнымъ по оси, перпендикулярной къ плоскости эклиптики. Пусть мы имѣемъ матеріальное тѣло, опредѣленной массы, подверженное только дѣйствію силы тяжести. Что произойдетъ съ тѣломъ, если его бросить въ просверленное отверстіе?

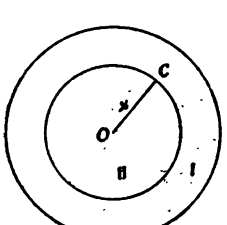
Рѣшеніе. Извѣстно, что всѣ тѣла притягиваются по закону Ньютона, при чемъ сила, движущая ихъ, выражается формулой $f=\frac{m_1 \cdot m_2}{v^2}$, гдѣ v—разстояніе между тѣлами, а m_1 и m_2—массы тѣлъ.

Если d—плотность земли, то ея масса$=\frac{4}{3}\pi R^3 d$ и сила $f=\frac{m_1}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 d=\frac{4}{3}\pi \cdot m \cdot d \cdot \frac{R^3}{r^2}=A \cdot \frac{R^3}{r^2}$, гдѣ A—постоянная величина, равная$\frac{4}{3}\pi m d$.

Если тѣло находится на поверхности земли, то $r=R$, такъ какъ всякій шаръ притягиваетъ такимъ образомъ, какъ будто бы вся его масса сосредоточена въ центрѣ. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ сила $f=AR$.

Пусть теперь тѣло находится внутри земли, напр. въ точкѣ C (черт. 32). Проведемъ черезъ эту точку концентрическую поверхность. Она разобьетъ нашу землю на двѣ части. Для тѣла первая часть будетъ внѣшнею и его притягивать не будетъ (см. предыдущую задачу), вторая же, какъ шаръ радіуса x, будетъ притягивать его съ силою

$$f=Ax.$$



Черт. 32.

Такимъ образомъ сила, дѣйствующая на тѣло, пропорціональна его разстоянію отъ центра земли.

Вслѣдствіе этого всякое тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ силы, измѣняющейся по такому закону, будетъ совершать маятникообразное (гармоническое) колебаніе. Поэтому, если въ просверленное въ землѣ отверстіе бросить матеріальное тѣло, то оно до центра земли двигалось бы ускоренно, а пройдя центръ стало бы двигаться замедленно; у поверхности земли, съ противоположной стороны, оно бы остановилось, затѣмъ полетѣло бы обратно и т. д., однимъ словомъ было бы осуществлено вѣчное движеніе (perpetuum mobile) *).

170.

Найти ускореніе тѣла въ предыдущей задачѣ.

Рѣшеніе. Мы видѣли, что на тѣло дѣйствуетъ сила $f=Ax$, гдѣ x— разстояніе тѣла отъ центра земли, а A— постоянная величина, равная $\frac{4}{3}\pi md$, при чемъ m— масса притягиваемаго тѣла, а d— плотность земли. Полностью формула напишется такъ

$$f=\frac{4}{3}\pi \,.\, m \,.\, d \,.\, x.$$

Съ другой стороны всякая сила F равна массѣ m тѣла, на которое она дѣйствуетъ, умноженной на сообщаемое этой массѣ ускореніе j, т.-е.

$$F=mj.$$

Отсюда найдемъ ускореніе j въ видѣ

$$j=\frac{F}{m}.$$

Такъ какъ сила F дѣйствуетъ на тѣло массы m, то ускореніе j, которое она сообщитъ этой массѣ, будетъ равно

$$j=\frac{F}{m}=\frac{4}{3}\pi dx.$$

Такимъ образомъ, ускореніе не зависитъ отъ массы движущагося тѣла, иначе говоря, всѣ тѣла при данныхъ условіяхъ двигались бы совершенно одинаково.

*) См. стр. 123 и слѣд.

Когда тѣло находится у поверхности земли, то $x=R$ и ускореніе j будетъ наибольшимъ; оно въ этомъ случаѣ равно

$$jmax=\frac{4}{3}\pi dR.$$

По мѣрѣ движенія тѣла, разстояніе между тѣломъ и центромъ земли будетъ уменьшаться, а потому будетъ уменьшаться и ускореніе его (но не скорость, которая будетъ возрастать, такъ какъ тѣло движется не по инерціи, а подъ непрерывнымъ дѣйствіемъ силы).

Когда тѣло придетъ къ центру, то $j=0$, скорость будетъ наибольшей. Подъ вліяніемъ пріобрѣтенной энергіи (которая равна $\frac{mv^2}{2}$) тѣло не остановится въ центрѣ, а полетитъ дальше, но лишь только тѣло выйдетъ изъ центра, какъ возникнетъ сила, тянущая его обратно къ центру, слѣдовательно сообщающая ему отрицательное ускореніе. Эта сила остановитъ тѣло только тогда, когда оно будетъ у поверхности земли. Въ этотъ моментъ скорость тѣла равна 0, и ускореніе j, равное $\frac{4}{3}\pi dR$, направлено къ центру земли.

171.

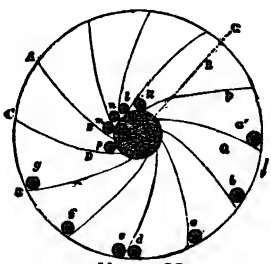
Perpetuum mobile.

Въ книгѣ Обреимова «Математическіе софизмы» приведено описаніе машины, изобрѣтатель которой утверждалъ на страницахъ французскаго журнала «Journal des savants», что, будучи разъ приведена въ движеніе, его машина не остановится до тѣхъ поръ, пока отъ тренія не испортятся ея движущіяся части.

Эта машина *) представляетъ собой барабанъ (черт. 33), раздѣленный внутри на полости сплошными перегородками AB, CD, EF и т. д. и надѣтый на валъ G. Радіусъ окружности барабана болѣе, чѣмъ въ 5 разъ превышаетъ радіусъ окружности вала. Въ каждомъ изъ отдѣленій барабана находится по тяжелому шару a, b, c и т. д., которые могутъ сво-

*) Описаніе машины заимствовано изъ вышеупомянутой книги Обреимова.

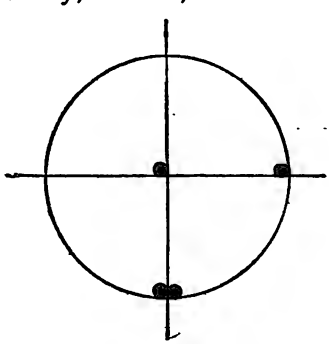
бодно скатываться или по направленію къ оси вращенія барабана или къ его периферіи, смотря по наклону перегородки.



Черт. 33.

Разсмотримъ машину въ томъ положеніи, какое дано ей на чертежѣ. Шары *b* и *g*, *f* и *c*, *e* и *d*, расположенные симметрично относительно вертикальнаго діаметра барабана, взаимно уравновѣшиваются, а шары *k*, *l*, *m*, *n* и *p*, прилегающіе къ оси, не въ состояніи оказать сопротивленія напряженію груза *a'*, который, вслѣдствіе этого, падая внизъ, производитъ движеніе колесъ по направленію стрѣлки. По мѣрѣ перемѣщенія отдѣленія барабана *P* на мѣсто, занимаемое *Q*, отдѣленіе *R* становится на мѣсто *P*, шаръ *k* перекатывается къ периферіи и приборъ снова оказывается въ условіяхъ, обезпечивающихъ возможность его вращенія.

Разъясненіе. Чтобы разобраться, можетъ ли эта машина осуществить вѣчное движеніе, построимъ нѣсколько упрощенную схему, именно, возьмемъ барабанъ, раздѣленный двумя взаимно-перпендикулярными перегородками на четыре части, какъ это указано на чертежѣ 34-мъ. Въ каждую часть положимъ по тяжелому шару и дадимъ всей системѣ легкое вращательное движеніе. Посмотримъ, будетъ ли наша система поддерживать данное вращеніе? Подъ системой, осуществляющей «вѣчное движеніе» подразумѣваютъ такую систему, на движеніе которой энергіи требуется

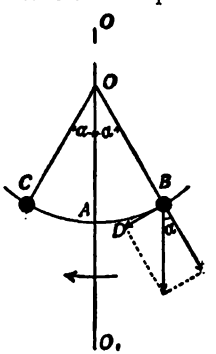


Черт. 34.

меньше, чѣмъ ея дѣйствительно освобождается въ машинѣ (излишекъ же идетъ на уничтоженіе работы тренія, или можетъ быть употребленъ по нашему усмотрѣнію). Если мы подсчитаемъ энергію паденія того шара *a'*, который приводитъ весь барабанъ въ движеніе и если обнаружимъ, что эта энергія больше затрачиваемой на вращеніе барабана и шаровъ до начала работы слѣдующаго шара *k*, то мы заключимъ, что, дѣйствительно, въ данномъ случаѣ наша машина осущест-

вляетъ perpetuum mobile. Но подсчитывать затрату энергіи на вращеніе барабана и шара пріемами элементарной математики нѣсколько затруднительно, а потому весь процессъ работы нашей машины мы сведемъ къ простѣйшимъ явленіямъ, предполагая, что подсчетъ превращенія энергіи въ нихъ извѣстенъ уже читателю.

Возьмемъ математическій маятникъ OA (черт. 35). Какъ извѣстно, математическимъ маятникомъ называется матеріальная точка A, вѣса mg (гдѣ m — ея масса, а g—притяженіе силы тяжести), подвѣшенная на невѣсомой нити къ точкѣ O. Линія AO соединяетъ такимъ образомъ центръ тяжести нашей системы съ точкой привѣса. Если отведемъ нашу точку въ B и отпустимъ, то она начнетъ колебаться около положенія своего равновѣсія OO', переходя изъ точки B въ C и обратно. Уголъ AOC, при этомъ, всегда будетъ равенъ углу AOB. Положеніе равновѣсія характеризуется тѣмъ, что въ немъ ускореніе j равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, разлагая вѣсъ матеріальной точки, когда она находится въ B, по направленіямъ OB' и BD видимъ, что дѣйствующею силою будетъ $BD = P\sin\alpha$, а BB' будетъ уничтожено сопротивленіемъ нити.



Черт. 35.

Эта сила $P\sin\alpha$, дѣйствуя на массу m, сообщитъ ей ускореніе j, равное

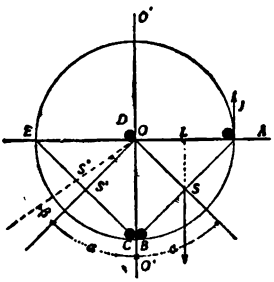
$$j = \frac{P\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha$$

Когда точка проходитъ черезъ положеніе OO', то $\alpha = 3$ и $j = 0$.

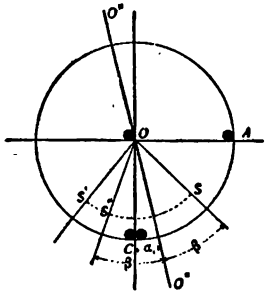
Перейдемъ теперь къ нашей схемѣ (черт. 34); здѣсь мы сдѣлаемъ (пока) слѣдующія предположенія, характерныя для идеальнаго случая: 1) нашъ барабанъ и перегородки невѣсомы, т.-е. ихъ масса равна 0, 2) что шары A, B, C и D, обладая значительнымъ вѣсомъ, имѣютъ ничтожно-малые размѣры и 3) что никакого тренія не существуетъ.

Въ такомъ случаѣ изученіе свойствъ барабана сводится къ предыдущему—къ маятнику. Въ самомъ дѣлѣ, шары D и B, вслѣдствіе ихъ ничтожныхъ размѣровъ будутъ находиться на вертикали $O'O$ и въ расчетъ поэтому не войдутъ, а шары

A и C, которые какъ бы прикрѣплены къ невѣсомымъ стержнямъ OC и OA, накрѣпко между собою связаннымъ, образуютъ математическій маятникъ COA. Центръ тяжести этого маятника находится въ срединѣ линіи AC, въ точкѣ S. Такимъ обра-



Черт. 36.



Черт. 37.

зомъ придется слѣдить за колебаніями линіи OS. Она отклонена отъ положенія своего равновѣсія $O'O'$ на уголъ COS, равный $\alpha=45°$. (Что линія $O'O'$ есть линія полож. равновѣсія, видно изъ чертежа 00). Совершая колебанія, точка S перейдетъ черезъ линію $O'O'$ и въ самомъ концѣ своего движенія придетъ въ S', при чемъ $\angle\ S'OC$ будетъ равенъ $\angle\ COS$. Въ этотъ моментъ стержень OC пойдетъ по направленію OE, и стержень AO—по направленію OO'. Остановившись на мгновеніе въ S', точка S начала бы двигаться назадъ, совершая обычныя маятникообразныя колебанія. Но не то получится, если мы въ самомъ началѣ движенія нашего барабана дадимъ ему небольшой толчокъ. Тогда при своемъ движеніи точка S не остановится въ S', а пройдетъ дальше на нѣкоторый уголъ β въ точку S'', но лишь только S выйдетъ изъ S', шаръ C скатится къ центру, а шаръ D—къ периферіи, и у насъ возстановятся первоначальныя условія расположенія шаровъ, и движеніе будетъ продолжаться въ ту же сторону. Такимъ образомъ движеніе хотя и будетъ постояннымъ, но его нельзя назвать «вѣчнымъ» въ принятомъ смыслѣ слова, такъ какъ на него будетъ тратиться вся энергія падающаго шара.

Такова «идеальная» картина явленія.

Что же будетъ происходить въ дѣйствительности?

Для этого опредѣлимъ ускореніе нашего маятника въ «идеальномъ» случаѣ. Какъ всегда, оно равно дѣйствующей силѣ, дѣленной на массу. Но здѣсь гораздо удобнѣе примѣнить слѣ-

дующій пріемъ. Основываясь на томъ, что 1) всякое дѣйствіе равно противодѣйствію, и что 2) при всякомъ равновѣсіи моментовъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону всегда равны моменты силъ, дѣйствующимъ въ обратную сторону, будемъ разсуждать такъ. Если дѣйствующая сила $2mg$, приложенная въ точкѣ S (въ центрѣ тяжести)—сообщаетъ всей системѣ ускореніе j, то сама система противодѣйствуетъ дѣйствующей силѣ съ силою $2mj$.

Если бы силы, дѣйствующая и противодѣйствующая, прилагались на одномъ разстояніи отъ центра, то мы прямо бы написали

дѣйствующая=противодѣйствующей.

Но у насъ дѣйствующая приложена на разстояніи OL (какъ всегда—оно измѣряется по перпендикуляру), одна половина противодѣйствующей—на разстояніи OA, а другая на разстояніи $OD=OA$. Такъ какъ ускореніе всюду направлено по касательной, то противодѣйствія обѣихъ половинокъ можно соединить въ одно и считать, что вся противодѣйствующая приложена въ точкѣ A. Моментъ дѣйствующей силы равенъ $2mg\,.\,OL$, моментъ же противодѣйствующей равенъ $2mj.\ OA = 2mjR$, гдѣ R—радіусъ барабана. Отсюда получаемъ

$$2mg\,.\,OL=2mjR \text{ (1) или } g\,.\,OL=jR$$

Но $OL=OS\sin\alpha$, $OS=R\cos\alpha$; отсюда

$$OL=R\cos\alpha\,.\,\sin\alpha=R\,.\,\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$gR\,\frac{\sin^2\alpha}{2}=jR \text{ или } j=\frac{1}{2}\,g\sin 2\alpha$$

При такомъ положеніи, какъ начальное, $\alpha=45°$, и

$$j=\frac{1}{2}g\sin(2.45°)=\frac{1}{2}g.$$

Положеніе равновѣсія, около котораго совершаются колебанія, опредѣляется изъ условія $j=0$. Слѣдовательно

$$j=\frac{1}{2}\,g\sin(2\alpha)=0, \text{ откуда } \sin 2\alpha=0 \text{ или } =0, \text{ т.-е.}\alpha$$

положеніемъ равновѣсія служитъ вертикаль.

Послѣ этого легко отвѣтить на вопросъ, что будетъ въ дѣйствительности съ разсматриваемой машиной.

Въ дѣйствительности у насъ всегда имѣется налицо треніе, которое препятствуетъ движенію съ нѣкоторымъ моментомъ K.

Условіе (1) перепишется теперь такъ:

$$2mg.OL—K=2mjR, \text{ или } g.OL—\frac{K}{2m}=jR.$$

Замѣняя OL его значеніемъ, получаемъ

$$g\,.\,\frac{1}{2}R\sin 2\alpha—\frac{K}{2m}=jR, \text{ откуда}$$

$$j=\frac{1}{2}g\sin 2\alpha—\frac{K}{2mR} \text{ или, окончательно}$$

$$j=\frac{1}{2}g\left(\sin 2\alpha—\frac{K}{gmR}\right).$$

Положеніе равновѣсія опредѣлится изъ условія $j=0$, или

$$j=\frac{1}{2}g\left(\sin\ 2\alpha—\frac{K}{gmR}\right)=0, \text{ а это равенство даетъ}$$

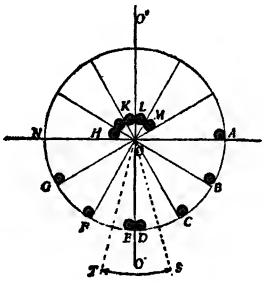
$$\sin\ 2\alpha=\frac{K}{gmR},$$

откуда и опредѣляется значеніе $\alpha_1=\alpha$, отмѣчающее положеніе $O''O''$, около котораго совершаются колебанія (черт. 37). Слѣдовательно, благодаря тренію, маятникъ будетъ отведенъ отъ положенія своего равновѣсія $O''O''$ только на уголъ β, равный $\alpha—\alpha_1=45°—\alpha_1$, а потому, при колебаніи, точка S не дойдетъ до S'', а остановится въ S''', при чемъ уголъ $S'OS''=2\alpha_1$ вслѣдствіе того, что $\angle\ S'OS'''=S'OC—S'''OK=\alpha—(\beta—\alpha_1)=$ $=\alpha—\beta+\alpha_1=\alpha—\alpha+\alpha_1+\alpha_1=2\alpha_1$.

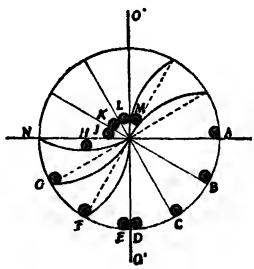
Слѣдовательно, если точка S никогда не придетъ въ S', то и стержень OC никогда не станетъ горизонтальнымъ, шаръ C никогда не перекатится къ центру, и движеніе не будетъ поддерживаться.

Не лучше будетъ обстоять дѣло и съ 12-ю шарами (черт. 38). Здѣсь можно разсмотрѣть колебаніе 6 шаровъ, именно A, B, C, E, F, G. Центръ тяжести лежитъ на линіи OS, которая при колебаніи безъ тренія дойдетъ до положенія OF, а шаръ G до N. Если же былъ данъ раньше толчокъ, то какъ линія OS, такъ и шаръ G, пройдутъ большій путь; тогда шаръ G можетъ перекатиться къ центру, а шаръ M — къ периферіи, и движеніе будетъ продолжаться. Но такъ какъ треніе у насъ

есть, а при двѣнадцати шарахъ оно больше чѣмъ при четырехъ (потому что вѣсъ всей системы больше), то OS никогда не



Черт. 38.



Черт. 39.

дойдетъ до OT, шары не будутъ перекатываться, и движеніе прекратится. А если мы приведемъ барабанъ въ быстрое вращеніе, то онъ дѣйствительно будетъ нѣкоторое время вращаться, пока вся сообщенная ему нами энергія не уйдетъ на преодолѣніе тренія; затѣмъ онъ остановится.

Но не выигрываетъ ли наша машина тѣмъ, что перегородки у нея изогнутыя, а не прямыя, какъ у насъ. Но и на это надо отвѣтить отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, хотя при передвиженіи шара G (черт. 38) къ центру передвигается вправо и линія OS, соединяющая центръ тяжести съ точкой привѣса, но выйти изъ области угла DOC она не можетъ.

Крайнимъ положеніемъ ея будетъ OC, соотвѣтствующее тому моменту, когда G уже находится въ центрѣ или когда его совсѣмъ нѣтъ.

Если бы положеніе OS всегда совпадало съ OC, то нашъ маятникъ (при отсутствіи тренія) сдѣлалъ бы размахъ на уголъ FOC, и OF стала бы горизонтальной. Если OF есть касательная къ перегородкѣ OG въ точкѣ O, то въ этотъ моментъ шаръ G пришелъ бы въ центръ (такъ какъ шаръ будетъ находиться въ той точкѣ поднимающей его перегородки, гдѣ касательная горизонтальна).

Но въ точкѣ O касательная къ перегородкѣ, на которой лежитъ шаръ M, будетъ параллельна касательной (или совпадать съ ней) въ той же точкѣ для перегородки OG, а потому, когда шаръ G будетъ въ центрѣ, шаръ M начнетъ скатываться. Такимъ образомъ весь выигрышъ отъ косыхъ перегородокъ

заключается лишь въ томъ, что шаръ постепенно подводится къ центру, а не сразу перескакиваетъ, какъ на схемѣ. Выигрыша же въ освобождающейся энергіи и здѣсь не получается.

Мы не будемъ останавливаться на детальномъ разборѣ машины съ кривыми перегородками, а предлагаемъ читателю самому задаться перегородками опредѣленной формы (хотя бы, напр. окружностями) такъ, чтобы знать въ любой точкѣ направленіе касательной и, пользуясь вышеизложеннымъ методомъ, уяснить себѣ невозможность выигрыша энергіи, т.-е. «вѣчнаго движенія».

Въ заключеніе скажемъ, что лицу, вѣрящему въ законъ сохраненія энергіи, не нужно входить въ сложныя математическія вычисленія. Его методъ разсужденія будетъ иной.

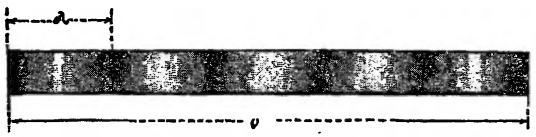
Онъ ясно увидитъ, что каждый шаръ, при вращеніи, опускается отъ точки k (черт. 33) до точки d, а затѣмъ вновь поднимается въ k. Слѣдовательно, та работа (энергія), которую онъ совершитъ при своемъ опусканіи, будетъ затрачена на его собственный подъемъ. Откуда же возьмется энергія на сообщеніе вращенія шарамъ при скатываніи ихъ по перегородкамъ, на преодолѣніе тренія ихъ о перегородки, на преодолѣніе тренія барабана о воздухъ, и о подшипники? Ея нѣтъ; нѣтъ, потому, и движенія. Но дѣло въ томъ, что изобрѣтатели такихъ машинъ не вѣрятъ въ законъ сохраненія работы, а потому приходится предлагать имъ разборъ того, что другимъ очевидно.

172.

Представимъ себѣ, что мы стоимъ около полотна желѣзной дороги и слышимъ свистокъ приближающагося къ намъ поѣзда. Зная скорость поѣзда, опредѣлить дѣйствительную высоту тона свистка.

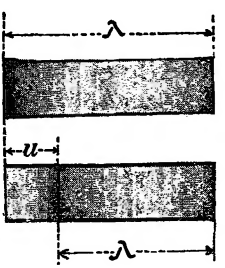
Рѣшеніе. Если бы поѣздъ былъ неподвиженъ, то до насъ въ одну секунду дошло какъ разъ столько звуковыхъ колебаній, сколько ихъ производитъ на самомъ дѣлѣ паровозный свистокъ. Но, такъ какъ поѣздъ движется, приближаясь къ намъ, то мы ощутимъ колебаній больше и, слѣдовательно, тонъ услышаннаго свистка будетъ выше того, который издаетъ свистокъ.

Обозначимъ черезъ λ длину звуковой волны свистка, черезъ v— скорость звука въ воздухѣ, черезъ u— скорость движенія поѣзда. Если время одного полнаго колебанія будетъ τ, а число колебаній въ секунду n, то $n=\frac{1}{\tau}$ и $\lambda=\frac{v}{n}=v\tau$ (см. черт. 40).



Черт. 40.

Во время τ одного колебанія начало волны (напр. узелъ ея) уйдетъ отъ источника на (черт. 39) длину λ, а самъ источникъ продвинется по тому же направленію на длину $u\tau$. Такъ какъ время перваго колебанія уже прошло, то источникъ звука начнетъ издавать второе колебаніе.



Черт. 41.

Такимъ образомъ получившаяся длина волны будетъ на λ, а $\lambda-u\tau=\lambda_1$ (черт. 41, нижняя волна).

Зная длину волны, легко опредѣлить число колебаній. Оно равно

$$n_1=\frac{v}{\lambda_1}=\frac{v}{\lambda-u\tau}.$$

Но $\lambda=v\tau$ и $\tau=\frac{1}{n}$, откуда

$$n_1=\frac{v}{v\tau-u\tau}=\frac{v}{\tau(v-u)}=n\,\frac{v}{v-u}.$$

Итакъ, если источникъ звука движется на насъ со скоростью u, то число n_1 ощутимыхъ ухомъ колебаній равно дѣйствительному числу n издаваемыхъ свисткомъ колебаній, увеличенному въ $\frac{v}{v-u}$ разъ.

Пусть скорость поѣзда 47,5 килом. въ часъ, что равно $\frac{47{,}5}{3600}\cdot 1000\,\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}=13\frac{1}{5}\,\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$

Тогда

$$n_1=n\,\frac{330}{330-13^1/_5},$$ гдѣ $330\,\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$ есть скорость звука.

Отсюда $n_1 = \frac{25}{24} n$.

Отношеніе чиселъ колебаній $\frac{n_1}{n}$, равное $\frac{25}{24}$, характеризуетъ собою повышеніе тона на малый полутонъ, такъ что если слышанная высота тона несущагося поѣзда есть «do діэзъ», то свистокъ на самомъ дѣлѣ даетъ только «do».

173.

Представимъ себѣ, что мы ѣдемъ въ автомобилѣ и мчимся къ тоннелю въ отвѣсной горѣ. Приблизительно за полъ-версты до него, шоферъ далъ гудокъ. Когда гудокъ смолкъ, мы услышали эхо, тонъ котораго оказался выше тона гудка на большую терцію. Опредѣлить скорость автомобиля.

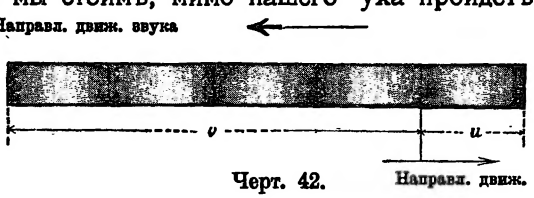
Рѣшеніе. Какъ уже было выяснено въ предыдущей задачѣ звукъ становится выше отъ приближенія автомобиля къ неподвижной горѣ. Если скорость автомобиля u $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$ и звука $v \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$, а число колебаній въ 1 сек., издаваемыхъ гудкомъ есть n, то до горы въ 1 сек. дойдетъ n_1 колебаній, при чемъ

$$n_1 = n \cdot \frac{v}{v-u}.$$

Дойдя до горы, звукъ отразится и пойдетъ обратно, и если бы мы стояли, то высота эхо была бы равна n_1.

Но мы движемся навстрѣчу эхо и тонъ его становится выше. Опредѣлимъ это повышеніе.

Когда мы стоимъ, мимо нашего уха пройдетъ n_1 колебаній



Черт. 42.

въ секунду. Когда же движемся навстрѣчу со скоростью u, то мимо насъ пройдетъ колебаній больше на столько, сколько

волнъ укладывается въ пройденномъ нами пути, т.-е. въ u метрахъ (черт. 42).

Такъ какъ въ 1 сек. совершается n_1 колебаній и скорость звука есть v $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$, то длина одной волны есть $\frac{v}{n_1}$ и на разстояніи u метровъ ихъ уложится

$$n : \frac{v}{n_1} = \frac{un_1}{v}.$$

Слѣдовательно, мы услышимъ больше колебаній на $\frac{u \cdot n_1}{v}$, всего-же

$$n_1 + \frac{u \cdot n_1}{v} = n_1 \frac{v+u}{v}.$$

Такова будетъ высота эхо n_2. Поэтому

$$n_1 = n_1 \frac{v+u}{v} = n \cdot \frac{v}{v-u} \cdot \frac{v+u}{v}.$$

Откуда

$$n_2 = n \frac{v+u}{v-u}.$$

Итакъ, если источникъ звука и наблюдатель движется другъ другу навстрѣчу, каждый со скоростью u_1 то, число слышимыхъ колебаній n_2 больше числа n дѣйствительно испускаемыхъ источникомъ въ $\frac{v+u}{v-u}$ разъ.

Проѣзжая въ автомобилѣ и слыша высоту гудка и эхо, установлено, что разница между ними—большая терція; это значитъ, что если гудокъ издавалъ тонъ «do», то эхо—«mi», если гудокъ издавалъ «fa» или «mi бемоль», то эхо соотвѣтственно—«la» или «sol».

Эти тона характеризуются тѣмъ, что число колебаній одного относится къ числу колебаній другого, какъ 5 : 4, т.-е.

$$\frac{n_2}{n} = \frac{5}{4}.$$

Сравнивая

$$n_1 = n \cdot \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad n_1 = n \frac{v+u}{v-u}$$

находимъ, что

$$\frac{v+u}{v-u}=\frac{5}{4}.$$

Замѣняя v его значеніемъ 330 $\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$, находимъ, что

$$\frac{330+u}{330-u}=\frac{5}{4},\ \text{откуда}\ u=\frac{330}{9}=\frac{110}{3}\frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}.$$

Опредѣляя u въ часахъ и километрахъ, найдемъ:

$$u=\frac{110\,.\,3600}{3\,.\,1000}=132\,\frac{\text{килом.}}{\text{часъ}},$$

т.-е. около 115 верстъ въ часъ.